

## Der Statistikprüfer: Eine Meßanordnung zur fortlaufenden Überprüfung des Schwankungscharakters und des Mittelwertes einer statistisch streuenden Zählrate

Von U. CAPPELLER und W. ZIMMERMANN

Mit 8 Textabbildungen

(Eingegangen am 18. März 1957)

### 1. Einleitung

Bei vielen Messungen, insbesondere kernphysikalischen Untersuchungen, wird man vor die Aufgabe gestellt, die „Konstanz“ einer statistisch streuenden Folge von Ereignissen (elektrischen Zählimpulsen) mit großer Genauigkeit über längere Zeiten hin zu kontrollieren. Eine Aufgabe dieser Art liegt z.B. vor, wenn zur Bestimmung der Winkelkorrelation einer  $\gamma$ -Kaskade die beiden auf ihre Koinzidenz hin zu überprüfenden Einzelimpulsfolgen als statistisch echt und zeitlich „konstant“<sup>1</sup> — z.B. als auf 1% oder noch besser konstant — vorausgesetzt werden müssen.

Als Maß für die „Konstanz“ einer Impulsfolge legt man in diesen Fällen zumeist die zeitliche Konstanz der mittleren Impulsrate („Zählrate“) heranziehen und für die Überprüfung der Konstanz Zählmeßgeräten (counting-rate-meter) zu verwenden. Das in diesen Geräten benutzte Verfahren (vgl. z.B. [1]) ist indes mit einer Unsicherheit behaftet, die in den üblichen Schaltanordnungen bei etwa 1% liegen dürfte. Zu dieser Verfahrensunsicherheit kommen dann noch die Anzeigefehler der benutzten Anzeige- und Registriergeräte hinzu. Die von einem Zählratenmesser angezeigten Werte können daher bei den oben angegebenen Genauigkeitsansprüchen nur bedingt zu Rückschlüssen auf die „Konstanz“ der gerade untersuchten Impulsfolge herangezogen werden.

Demgegenüber wird nachstehend ein neues Meßverfahren für die laufende Überprüfung einer Impulsfolge beschrieben. Nach diesem Verfahren kann nicht nur die Zählrate einer Impulsfolge mit einer gegenüber dem alten Verfahren wesentlich erhöhten Genauigkeit ausgemessen und ohne Beschränkung durch die Genauigkeit der verwendeten Anzeigegeräte angezeigt und registriert werden; eine nach diesem Verfahren aufgebaute Meßeinrichtung liefert gleichzeitig auch noch laufend eine Aussage über den Schwankungscharakter der untersuchten Impulsfolge.

Als Beispiel für eine solche Meßanordnung wird im folgenden eine Anordnung genauer behandelt, die im Zählratenbereich zwischen  $10^4 \text{ sec}^{-1}$  bis  $10 \text{ sec}^{-1}$  für eine Anzeigegenauigkeit von 0,2% ausgelegt ist. Meßanordnungen mit dieser Anzeigegenauigkeit dürften für die meisten kernphysikalischen Untersuchungen

ausreichend sein. Anderenfalls kann die hier beschriebene Anordnung an Hand der aufgezeigten Prinzipien leicht zu einer noch genauer arbeitenden Anordnung ausgebaut werden.

### 2. Allgemeine Übersicht über das benutzte Meßverfahren

Das hier benutzte Verfahren zur laufenden Überprüfung einer Impulsfolge greift auf das Grundver-

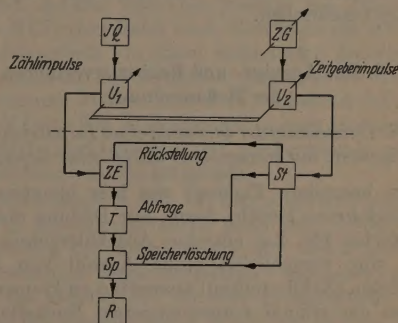


Abb.1. Grundsätzlicher Aufbau der Meßanordnung. IQ Impulsquelle; ZG Zeitgeber (Quarzgenerator (3 kHz) und Zeitgeber-Unter-setzer, Unter-setzungsfaktor einstellbar zwischen 1 und  $10^4$ ); ZE Zähl-einrichtung; St Steuerstufe; T Torschaltung; Sp Speicher; R Registrier-einrichtung;  $U_1$  und  $U_2$  Vorunter-setzer, vgl. (3.1)

fahren zur Beurteilung statistisch streuender Impulsfolgen zurück: die in gleichen Zeitabschnitten eingetretenen Zählereignisse (Zählimpulse) auszuzählen, die Auszählergebnisse zu registrieren und dann diese Ergebnisse miteinander zu vergleichen.

Dementsprechend werden in der hier beschriebenen Meßanordnung (Abb.1) die Zählimpulse der zu untersuchenden Impulsfolge zunächst einmal einer Zähl-einrichtung (ZE) zugeführt<sup>2</sup>, die — von den Impulsen eines Zeitgebers (ZG) über eine Steuerstufe (St) periodisch auf Null zurückgestellt — nach einer Rückstellung immer wieder von Neuem beginnend die Anzahl der einlaufenden Impulse auszählt. Die Dauer der Rückstellperiode (Zählintervall) kann dabei am Zeitgeber (Quarzgenerator mit nachgeschaltetem, vorwählbarem Unter-setzer) bei einer zeitlich hohen Konstanz

<sup>1</sup> Auf die Überprüfung einer Impulsfolge, deren Rate sich einer gesetzmäßigen Weise (radioaktiver Zerfall) zeitlich ändert, wird weiter unten noch eingegangen werden (vgl. 6.).

<sup>2</sup> Auf die Funktion der beiden „Vorunter-setzer“  $U_1$  und  $U_2$  wird erst an späterer Stelle (3.1) einzugehen sein.



des jeweils eingestellten Wertes in weiten Grenzen beliebig verändert werden<sup>1</sup>.

Die Registrierung und weitere Auswertung des Auszählergebnisses ist indes durch folgenden Umstand wesentlich erschwert: das jeweilige Auszählergebnis ist von der Zählleinrichtung nur für die kurze Zeit zwischen dem „letzten Zählimpuls“ und dem Beginn der erneuten Rückstellung abzulesen; die Registrierung des Auszählergebnisses müßte jedesmal in einer Zeit vorgenommen werden, die etwa dem mittleren Zählimpulsabstand entspricht, ohne daß das zeitliche Auflösungsvermögen der Registrierapparatur zwischenzeitlich ausgenutzt würde. Diese unnötige Überforderung der Registrierapparatur wird in der vorliegenden Meßanordnung (Abb. 1) durch die Benutzung eines Speicherverfahrens bei der Registrierung vermieden: alle Auszählergebnisse werden kurz vor der Rückstellung der Zählleinrichtung jeweils über eine getastete Torschaltung ( $T$ ) an einen Speicher ( $Sp$ ) weitergegeben und dort über das ganze nächstfolgende Zählintervall hin (im normalen Betriebsfall etwa 1 sec lang) bis zur Eingabe eines neuen Auszählergebnisses festgehalten<sup>2</sup>.

Die Beobachtung, Registrierung und Auswertung der Auszählergebnisse kann auf diese Weise ohne technische Schwierigkeiten vorgenommen werden. Einzelheiten hierzu werden in den folgenden Abschnitten genauer beschrieben.

### 3. Das Anzeige- und Registrierverfahren der Meßanordnung

#### 3.1. Die Darstellung der Streuung einer Impulsfolge durch Anzeigewerte mit vorgegebener statistischer Genauigkeit

Die besondere Eigenart des hier benutzten Anzeigeverfahrens besteht darin, zur Bildung eines Anzeigewertes für das einzelne Auszählergebnis wahlweise eine verschieden große Anzahl von Einzelereignissen (Zählimpulsen) auswerten zu können, ohne daß an der einmal vorgenommenen Einstellung des Zeitgebers ( $ZG$ ) auf eine bestimmte Zählrate (Einstellung des Zeitgeber-Untersetzers) eine Änderung vorgenommen werden müßte. Dazu sind in Erweiterung des eben beschriebenen grundsätzlichen Aufbaus sowohl vor die Zählleinrichtung ( $ZE$ ) als auch in den Weg der Zeitgeberimpulse noch die beiden Untersetzter  $U_1$  und  $U_2$  (Voruntersetzter) eingeschaltet, deren Untersetzungsfaktor  $f_1 = f_2 = f$  nach Belieben, zwangsweise aber nur gleichzeitig umgeschaltet werden kann. Diese Voruntersetzter werden vom Zeitgeber ( $ZG$ ) her nicht auf Null gestellt.

Die Anzahl  $N_i$  der im Verlauf eines Zählintervalles  $T_R$  eingelaufenen Zählimpulse wird bei diesem Verfahren von der immer wieder auf Null zurückgestellten Zählleinrichtung ( $ZE$ ) durch einen Zählwert  $A_i$  — den Anzeigewert — angezeigt. Dieser Anzeigewert  $A_i$  ist mit dem Auszählergebnis  $N_i$  durch die Beziehung

$$N_i = f \cdot A_i + \varrho_i \quad (1)$$

<sup>1</sup> Dem Zeitgeber der hier beschriebenen Meßanordnung können Rückstellimpulsfolgen mit einem Impulsabstand bis zu 3 sec in Stufen von 0,3 msec ansteigend entnommen werden.

<sup>2</sup> Auf die speziellen Einzelheiten bei der Übernahme des Auszählergebnisses in den Speicher (Toröffnung, Speicherung und Rückstellung der Zählleinrichtung) wird an späterer Stelle (4.1) noch ausführlicher eingegangen.

verknüpft, wobei

$$0 \leq \varrho_i < f \quad (1a)$$

die Differenz zwischen den am Anfang und am Ende des Rückstellintervalles noch im Untersetzter  $U_1$  stehenden Impulsen bedeutet. Die Häufung der Auszählergebnisse um einen Mittelwert  $\bar{N}_i = N$  ist in diesem Falle an einer Häufung der Anzeigewerte um den Mittelwert  $\bar{A}_i = A$  zu erkennen, wobei unter Beachtung von  $\varrho_i = f/2$

$$N = f \left( A + \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

gilt. Die Zählrate  $r$  der gerade untersuchten Impulsfolge ist daraus nach

$$r = \frac{N}{T_R} = \frac{f}{T_R} \left( A + \frac{1}{2} \right) \quad (3)$$

zu berechnen.

Der Sinn dieses Verfahrens ergibt sich aus folgendem: Nach (3) ist eine bestimmte Zählrate  $r$  unabhängig von einer Umschaltung  $f$  stets mit dem gleichen Häufungswert  $A$  verbunden, wenn dabei  $T_R$  in gleicher Weise mit umgeschaltet wird, so daß  $f/T_R = \text{const}$  gilt. Dies ist aber bei der oben erwähnten gekoppelten Umschaltung von  $U_1$  und  $U_2$  stets der Fall. Die Anzeigewerte  $A_i$  für die Streuung einer bestimmten Impulsfolge werden sich demnach bei einer einmal vorgenommenen Einstellung des Zeitgebers ( $ZG$ ) unabhängig von der Einstellung  $f$  der Untersetzter  $U_1$  und  $U_2$  stets um den gleichen Mittelwert häufen. Die verschiedenen Folgen der  $A_i$ -Werte unterscheiden sich dabei allerdings in gewünschter Weise dadurch, daß je nach der Einstellung von  $f$  eine verschieden große Anzahl von Einzelereignissen zur Bildung eines Anzeigewertes ausgenutzt wird. Nach den Grundregeln der Statistik ist damit aber eine wesentliche Änderung der Verteilungsfunktion verbunden, mit der sich die einzelnen Anzeigewerte um ihren Mittelwert häufen. Der statistische Charakter der zu untersuchenden Impulsfolge drückt sich hierbei insbesondere darin aus, daß die maximale statistische Schwankung der einzelnen Anzeigewerte je nach der Einstellung von  $f$  auf einen mehr oder minder engen Bereich  $\pm \Delta A$  um den Mittelwert  $A$  herum beschränkt bleibt.

Die Verteilungsfunktion für die  $N_i$ -Werte wird nämlich bei einer echten statistischen Impulsfolge durch

$$v(N_i) dN_i = \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{N}{2} \delta^2 \right\} d\delta \quad (4)$$

beschrieben, wobei

$$N = \bar{N}_i = r \cdot T_R \quad (5)$$

den Mittelwert der Auszählergebnisse für den Zeitabschnitt  $T_R$  und

$$\delta = \frac{N_i - N}{N} \quad (6)$$

die relative Schwankung des einzelnen Auszählergebnisses bedeutet<sup>3</sup>.

Die mittlere relative Schwankung  $m$  des einzelnen Auszählergebnisses („Halbwertsbreite der Verteilungskurve“) ist

<sup>3</sup> Eine Gauß-Verteilung  $v(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$  darf hier vor-

ausgesetzt werden, da die an und für sich vorliegende Poisson-Verteilung in der Umgebung ihres Maximums für große  $N$  weitgehend durch eine Gauß-Verteilung beschrieben werden kann.



ei dieser Verteilung durch

$$m = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (7)$$

gegeben, wofür mit (2) auch

$$m = \frac{1}{\sqrt{f \cdot (A + \frac{1}{2})}} \approx \frac{1}{\sqrt{f \cdot A}} \quad (7a)$$

beschrieben werden kann. Die mittlere relative Schwankung der Anzeigewerte und damit auch die mittlere relative Schwankung der  $A_i$ -Werte<sup>1</sup> wird demnach wesentlich durch den Vorfaktor  $f$  bestimmt. Je nach der Einstellung von  $f$  können derart zur Darstellung des statistischen Charakters der Impulsfolge Anzeigewerte mit einer verschiedenen hohen statistischen Genauigkeit herangezogen werden.

Bei einer Gaußverteilung mit der mittleren relativen Schwankung  $m$  darf man überdies damit rechnen, daß 95% der Auszählergebnisse in einen Bereich mit der relativen Breite  $\pm 2m$  und 99,7% in einen Bereich mit der relativen Breite  $\pm 3m$  fallen. Es wird also in guter Näherung

$$\Delta A = 3m \cdot A, \quad (8)$$

heraus mit (7a)

$$\Delta A = 3 \sqrt{\frac{A}{f}} \quad (9)$$

lgt.

Eine statistisch echte Impulsfolge kann auf diese Weise allein schon daran, daß nur sie fortlaufend zu einem gespeicherten Auszählergebnis in einem engen Intervall  $A \pm \Delta A$  führt, von einer statistisch unechten, gestörten Impulsfolge unterschieden werden. Zur Bestätigung dessen und zur genauen Bestimmung des Mittelwertes der  $A_i$ -Werte und damit der Impulsrate braucht dann nur noch die Häufigkeit, mit der sich die einzelnen Auszählergebnisse über das Speicherintervall hin verteilen, genauer untersucht werden<sup>2</sup>.

### 3.2. Die gespreizte Anzeige und Registrierung der Anzeigewerte

Zur Auszählung der Zählpulse werden in der vorliegenden Meßanordnung dekadisch arbeitende Zählstufen benutzt, so daß hier die Anzeigewerte  $A_i$  der Form

$$A_i = (a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n)_i \quad (10)$$

erscheinen. Bei diesem Verfahren ist die relativ höchste Anzeigempfindlichkeit offenbar dann gegeben, wenn bei einer Auszählung Anzeigewerte mit  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 9$  erreicht werden. Eine Änderung von um eine Einheit drückt in diesem Falle eine relative Änderung des Anzeigewertes (Anzeigempfindlichkeit) von

$$\varepsilon = \frac{1}{a_0 + 9 \cdot 10 + \dots + 9 \cdot 10^n} \approx \frac{1}{10^{n+1}} \quad (11)$$

aus.

<sup>1</sup> Dabei ist die bei großen  $A$ -Werten ( $A \approx 100$ ; vgl. 3.2) geringfügige Verbreiterung der  $A_i$ -Verteilung gegenüber der  $A_i$ -Verteilung außer acht gelassen.

<sup>2</sup> Die einzige „Störung“ einer statistisch streuenden Impulsfolge, die auf diese Weise nicht erkannt werden kann, ist eine mit dem Zählintervall  $T_R$  in der Periode übereinstimmende, phasenstarr gekoppelte Störimpulsfolge. In diesem Falle würde eine Auszählung nach dem hier beschriebenen Verfahren je nach der Phasenlage der Störimpulsfolge zu verschiedenen Ergebnissen führen. Die Meßanordnung würde in diesem Falle wie ein „look-in-amplifier“ für die Störimpulsfolge wirken.

Um diesen Betriebsfall bei der Einstellung des Zeitgebers auf eine bestimmte Zählrate zwangsläufig zu erreichen, ist die Anordnung zur Speicherung der Anzeigewerte (vgl. Abb.1) in besonderer Weise eingerichtet: Ein Anzeigewert  $A_i$  am Ende eines Zählintervalles kann nur dann in den Speicher übernommen werden, wenn die Auszählung zu einem Anzeigewert mit  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 9$  geführt hat. Und zwar wird dabei — eine besondere Eigenart des hier benutzten Anzeigeverfahrens — von dem jeweiligen Anzeigewert  $A_i$  nur der  $a_0$ -Wert in den Speicher übernommen.

Dieses Verfahren bietet drei Vorteile:

Zunächst gewinnt man auf diese Weise den Vorteil, den Anzeigewert  $A_i$  an einem einziiffrigen Zahlenwert — dem allein gespeicherten  $a_0$ -Wert — mit einer hohen Relativ-Genauigkeit „gespreizt“ ablesen zu können. Dadurch kann die Häufung der Anzeigewerte in einem verhältnismäßig engen Bereich, wie sie bei einer Impulsfolge mit echter Statistik zu erwarten ist, leicht an einer Häufung in den zehn grob voneinander unterschiedenen Speicherwerten  $a_0 = 0, 1, 2, \dots, 9$  erkannt werden. Eine derartige Häufung tritt besonders dann deutlich hervor, wenn — wie es bei der hier beschriebenen Meßanordnung der Fall ist — zur Darstellung der einzelnen Speicherwerte eine dekadische Zählröhre mit direkter optischer Anzeige des Zählwertes (Philips E1 T) verwendet wird. Hier kann die Häufung der Speicherwerte um einen bestimmten Anzeigewert herum schon am geometrischen Eindruck der Anzeige daran erkannt werden, daß der Leuchtfleck der Zählröhre bei fast allen Auszählungen immer in denselben Zählfenster verbleibt und nur gelegentlich in ein anderes Zählfenster hinüberspringt.

Daneben gewinnt man bei dem eben beschriebenen selektiven Speicherverfahren noch den Vorteil, eine Registrierung der Anzeigewerte mit verhältnismäßig grob arbeitenden Registriergeräten vornehmen zu können<sup>3</sup>. Das gleiche gilt für eine integrierende Registrierung der Speicherwerte. Auch hier können — der gespreizten Darstellung der Speicherwerte entsprechend — Integrationsanordnungen mit grob aufgebauten Registriergeräten verwendet werden, ohne daß die nutzbare Anzeigegenauigkeit dadurch beeinträchtigt würde. Auf diesbezügliche Einzelheiten wird bei der Besprechung der technischen Einzelheiten der Meßanordnung noch einzugehen sein.

Zum dritten bietet die gespreizte Anzeige der  $A_i$ -Werte im Speicher noch die Möglichkeit, die im vorigen Abschnitt erwähnte Eigenschaft einer statistisch echten Impulsfolge ausnutzen zu können, daß nur bei einer solchen Impulsfolge alle Auszählergebnisse in ein schmales Intervall hineinfallen. Dazu muß allerdings der durch die Speicherung ausgezeichnete Bereich

$$A_{\text{Sp min}} < A < A_{\text{Sp max}}$$

an den Bereich der maximal zu erwartenden statistischen Schwankung eines Auszählergebnisses [vgl. (8)] angepaßt sein. Es muß also

$$A_{\text{Sp max}} - A_{\text{Sp min}} = 2\Delta A \quad (12)$$

<sup>3</sup> Bei der eben genannten Zählröhre E1 T sind den Zählwerten (0, 1, ..., 9) jeweils um etwa 15 V voneinander unterschiedene Spannungswerte zugeordnet.



gelten, woraus mit (9) und mit  $A_{\text{Sp max}} - A_{\text{Sp min}} = 9$

$$f_{\text{opt}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 A = 0,44 A \quad (13)$$

folgt. Bei dieser speziellen Wahl des Voruntersetzungsfaktors  $f$  wird die statistische Streuung einer Impulsfolge gerade auf den vollen Speicherbereich abgebildet. Diese Einstellung von  $f$  wird daher im Betriebsfalle besonders anzustreben sein.

Die weiter unten genauer beschriebene Meßanordnung ist mit einem zweistufigen ( $n=1$ ) dekadischen Zähler aufgebaut. Eine derartige Anordnung wird offenbar dann am besten ausgenutzt, wenn die einzelne Auszählung zu Anzeigeergebnissen aus der 90er Dekade mit einer Häufungsstelle bei  $A=95$  führt; sowohl positive als auch negative Abweichungen der Auszählergebnisse vom Mittelwert 95 werden unter diesen Umständen optimal zu beobachten sein. Je nach der Einstellung der Voruntersetzungsfaktoren  $f$  müssen hierzu mehr oder weniger viele Einzelereignisse  $N=f \cdot A$  gezählt werden. Die dazugehörigen mittleren relativen Schwankungen  $m$  und die daraus resultierenden maximalen Streuungen der Anzeigewerte sind in der Tabelle 1 zusammengefaßt. Die

Tabelle 1. Die Einstellmöglichkeiten einer zweistufigen Meßanordnung

$f$	4	12	40	120	400
$N$	380	1140	3800	11400	38000
$m$	5,1%	3,0%	1,6%	1,1%	0,5%
$A \pm \Delta A$	$95 \pm 15$	$95 \pm 8$	$95 \pm 4,5$	$95 \pm 3,0$	$95 \pm 1,5$

„optimale“ Ausnutzung des zweistufigen dekadischen Zählers ist demnach bei den hier gegebenen Einstellmöglichkeiten offenbar bei  $f=40$  gegeben; hier wird die Halbwertsbreite der nach der Statistik zu erwartenden Streuverteilung auf den vollen Bereich des Speichers ( $A=90 \dots 99$ ) verteilt. Zweckmäßigerweise wird man allerdings häufig eine Einstellung  $f=120$  wählen, um auch die Ausläufer der Streuverteilungskurve zu erfassen.

Bei einer Einstellung von  $f=400$  wird die Streuverteilung noch mehr zusammengedrängt; eine derartige Einstellung kann für länger andauernde Untersuchungen, in denen nur der Gang des Mittelwertes einer Zählrate interessiert, von Nutzen sein.

Die beiden anderen Einstellmöglichkeiten ( $f=4$  bzw. 12) werden bei der Einstellung des Statistikprüfers zum Eingrenzen des zu wählenden Zeitgeberintervalles verwendet.

### 3.3. Die nutzbare Anzeigegenauigkeit einer $n$ -stufigen Meßanordnung

Bei dem eben beschriebenen Anzeigeverfahren wird die Streuung der einzelnen Auszählergebnisse  $N_i$  auf eine Streuung in den Anzeigewerten  $A_i$  abgebildet. Dabei geht die Verteilung  $v(N_i)$ , durch welche die Häufigkeit der einzelnen Auszählergebnisse  $N_i$  beschrieben wird, in eine andere Verteilung  $V(A_i)$  über.

Die Anzeigegenauigkeit der Meßanordnung wird damit letzten Endes durch diejenige Genauigkeit bestimmt, mit der sich der Mittelwert  $A$  aus der Verteilung  $V(A_i)$  entnehmen läßt. Einer solchen, nur für eine begrenzte Anzahl von Argumenten (hier 10 Argu-

mente) definierten Verteilungskurve (Treppenkurve) sollte aber der Mittelwert mit keiner größeren Genauigkeit entnommen werden, als es etwa einen Fünftel der Argumentendifferenz entspricht. Die nutzbare Genauigkeit wird dadurch auf etwa ein Fünftel der Anzeigeempfindlichkeit festgelegt. Zusammen mit (11) ergibt sich

$$\epsilon_{\text{nutz}} = \frac{1}{5} \epsilon = \frac{1}{5} \cdot 10^{-(n+1)} = 0,2 \cdot 10^{-(n+1)} \quad (14)$$

Der hier beschriebenen Meßanordnung mit einem zweistufigen Zähler kann dementsprechend der Häufungswert der  $A_i$ -Werte mit einer Genauigkeit von 0,2% entnommen werden.

Eine Erhöhung von  $\epsilon_{\text{nutz}}$  kann nur durch eine Vergrößerung der Stufenzahl des Zählers erreicht werden. Die Angabe derartiger genauer Mittelwerte setzt allerdings voraus, daß die Verteilungskurve  $V(A_i)$  symmetrisch zu der Häufungsstelle der Anzeigewerte liegt. Dies kann aber nur durch eine fortlaufende Beobachtung der Verteilungskurve (Glockenkurve der  $A_i$ -Werte, vgl. Abb. 8) beurteilt werden.

## 4. Die Schaltanordnung eines zweistufigen Statistikprüfers

### 4.1. Grundsätzliche Wirkungsweise der Schaltanordnung

Die Wirkungsweise der Schaltanordnung läßt sich an Hand des Blockschaltbildes (Abb. 2) in folgender Weise beschreiben<sup>1</sup>.

Die ankommenden Impulse ① (Impulsquelle IQ) werden zunächst einer Zählereinrichtung (ZE) zugeführt. Diese Zählereinrichtung besteht aus zwei hintereinandergeschalteten Zähldekaden (e) und (z). Jedem Zählzustand dieser Dekaden ist an geeigneten Meßpunkten (ⓐ) und (ⓑ); vgl. auch Abb. 3 u. 6) als Maß für die Anzahl der auf die betreffende Dekade gelangten Zählimpulse eine ganz bestimmte Spannung zugeordnet. Der zeitliche Verlauf dieser Spannungen (ⓐ) und (ⓑ) ist (in Abhängigkeit von der Anzahl der „gezählten“ Impulse) in Abb. 3 dargestellt. Beide Spannungen zeigen in Abhängigkeit von der Zeit einen treppenförmigen Verlauf; sie werden im folgenden als „Treppenspannungen“ bezeichnet.

Die Treppenspannung der Einerdekade (ⓐ, Abb. 2) gelangt über einen Kathodenverstärker ( $KV_1$ ) auf die Torschaltung ( $T_1$ ). Diese Torschaltung hat folgende Aufgabe: sie gibt die Treppenspannung (ⓐ) nur dann weiter, wenn sich die Zehnerdekade im Zählzustand „9“ befindet. Die Treppenspannung (ⓑ) der Zehnerdekade (z) steuert dazu einen Amplitudendiskriminator ( $D$ ), der nur dann ein Ausgangssignal (④, Abb. 2 und 3) liefert, sobald und solange die Zehnerdreppenspannung den zum Zählzustand „9“ gehörenden Spannungswert erreicht hat. Diese Ausgangsspannung (④) wird dann zum Öffnen der Torschaltung ( $T_1$ ) verwendet.

Hinter der Torschaltung ( $T_1$ ) können somit nur die zu den Zählzuständen 90 bis 99 gehörenden Spannungen (⑤) auftreten. Für alle anderen Zählzustände stellt sich hinter dem Tor eine stets gleiche Ruhespannung ein.

<sup>1</sup> Die nachfolgende Beschreibung einer zweistufigen Meßanordnung umfaßt nur den in Abb. 1 durch Strichelung abgetrennten Teil. Die anderen Hilfsgeräte der Meßanordnung sind in der üblichen Weise aufgebaut [2], [3]; ihre Einzelheiten werden hier nicht besonders behandelt.



Soll nun die Zählleinrichtung in der oben beschriebenen Weise wirken, so muß die Zählleinrichtung mit jeder Periode der Zeitgeberimpulse (2) immer wieder auf Null zurückgestellt werden, nachdem zuvor das Ergebnis der Auszählung (Zählzustand der Zählleinrichtung im Moment der Abfrage = Auszählergebnis  $A_i$ ) über die Torschaltung ( $T_2$ ) in den Speicher ( $Sp$ ) und an die daran angeschlossenen Registriergeräte weitergeleitet worden ist. Zur Steuerung der dazu notwendigen Schaltvorgänge dient die Steuerstufe ( $St$ ); sie besteht aus zwei Univibratoren ( $V_1$  und  $V_2$ ), deren Ausgangspulse zeitlich in bestimmter Weise aufeinanderfolgend (vgl. Abb. 4) die verschiedenen Schalt-, Löscho- und Rückstellvorgänge auslösen.

Diese Vorgänge laufen im einzelnen in folgender Weise ab: die Zählleinrichtung ( $ZE$ ) sei durch den  $n$ -ten Zeitgeberimpuls (Abb. 3) auf Null gestellt worden und anschließend durch die ankommenden Zählimpulse (1) in einen Zählzustand gelangt, der im Speicherbereich, z.B. bei  $A_i = 93$ , liegen möge. In diesem Zeitmoment möge der  $(n+1)$ -te Zeitgeberimpuls die beiden Univibratoren ( $V_1$  und  $V_2$ ) auslösen. Der von  $V_1$  gelieferte Impuls (Speicher-Löschimpuls, (9), Abb. 2 und 4) stellt dann zunächst den

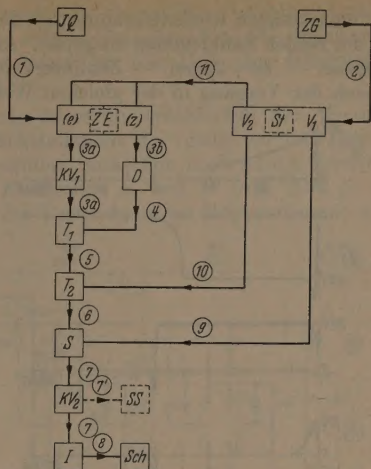


Abb. 2. Blockschaltbild des Statistikprüfers. (Die eingekreisten Zahlen 1 bis 11 verweisen auf Abb. 3, Darstellung des Spannungsverlaufs an den betreffenden Meßpunkten.) IQ Impulsquelle; ZG Zeitgeber; ZE Zählleinrichtung;  $e$  Elnerdekade;  $z$  Zehnerdekade;  $KV_1$  und  $KV_2$  Kathodenverstärker;  $D$  Diskriminator;  $T_1$  und  $T_2$  Torschaltungen;  $Sp$  Speicher;  $I$  Integrator;  $Sch$  Schreiber;  $SS$  Schnellreiber;  $St$  Steuerstufe;  $V_1$  und  $V_2$  Univibratoren

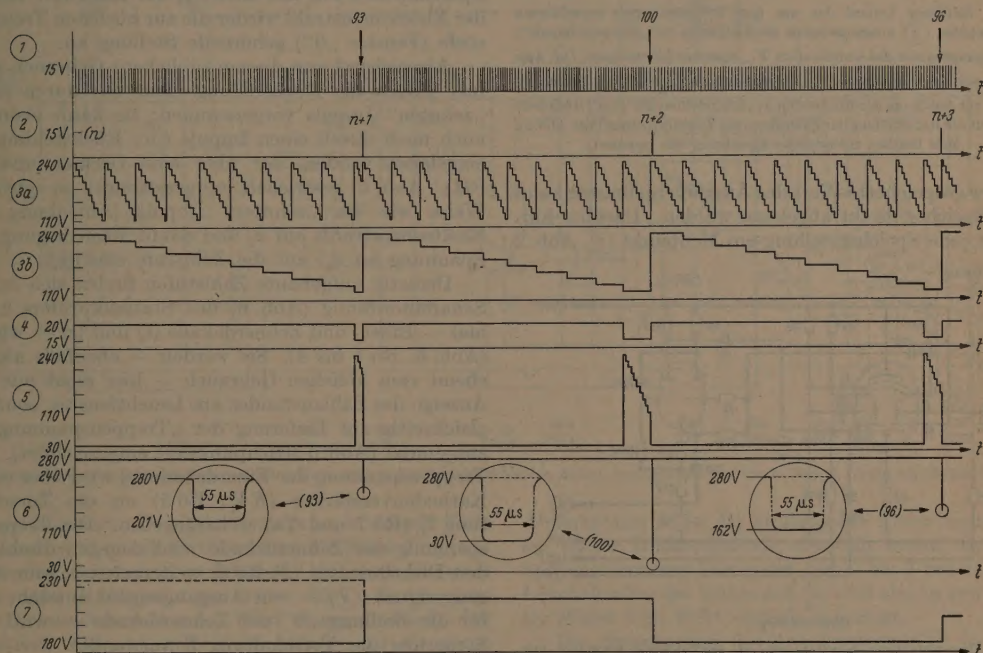


Abb. 3. Idealisiertes Impulsdiagramm. In den einzelnen Zeilen ist in der Ordinatenrichtung der Spannungsverlauf an den im Blockschaltbild (Abb. 2) bezeichneten Meßpunkten, in der Abszissenrichtung die Zeit (gleicher Maßstab in allen Fällen) aufgetragen; die eingekreisten Bildteile (9) stellen vergrößert den Spannungsverlauf hinter dem Abfrage-Tor  $T_2$  dar. 1 Statistische Zählimpulsfolge; 2 Zeitgeberimpulse; 3a Treppenspannung der Elnerdekade  $e$ ; 3b Treppenspannung der Zehnerdekade  $z$ ; 4 Diskriminator-Ausgangssignal; 5 Ausgangsspannung der Torschaltung  $T_1$ ; 6 Ausgangsspannung der Torschaltung  $T_2$  (abgefragter Anzeigewert  $A_i$ ); 7 gespeicherter Anzeigewert

Speicher ( $Sp$ ) auf Null<sup>1</sup>, während der gleichzeitig einsetzende, aber etwas länger dauernde Impuls von  $V_2$  (Abfrageimpuls), (10, Abb. 2 und 4) das Tor ( $T_2$ ) öffnet.

Nach dem Abklingen des Impulses (9) stellt sich am Ende von (10) (dieser Impuls dauert etwas länger

als (9)) der hinter dem Tor ( $T_2$ ) gerade vorliegende Spannungswert (8) auch im Speicher ein<sup>2</sup>.

Anschließend wird das Tor ( $T_2$ ) nach dem Abklingen von (10) wieder geschlossen und durch den

<sup>2</sup> Wenn das Auszählergebnis nicht im Speicherbereich lag, stellt sich der Speicher auf einen nicht angezeigten Ruhevwert ein.

<sup>1</sup> Vgl. Abschnitt 4.2, Speicherröhre.



nunmehr einsetzenden Rückstellimpuls (11) die Rückstellung der beiden Zähldekaden ausgelöst. Am Ende des nächsten —  $(n+2)$ -ten — Zählintervalles wiederholt sich der Vorgang in der gleichen Weise.

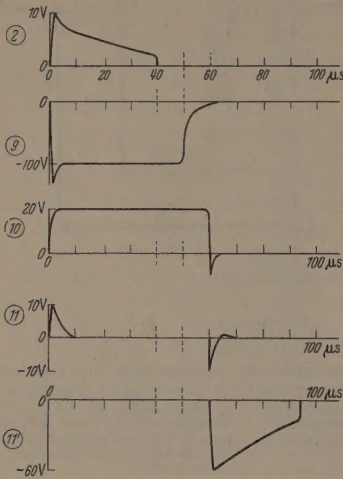


Abb. 4. Zeitlicher Verlauf der aus dem Zeitgeberimpuls hergeleiteten Steuerimpulse. (2) Ausgangsimpuls des Zeitgebers ZG „Zeitgeberimpuls“; (9) Ausgangsimpuls des Univibrators  $V_1$  „Speicher-Löschimpuls“; (10) Ausgangsimpuls des Univibrators  $V_2$  „Abfrage-Impuls“; (11) differenzierter Impuls (10) zur Auslösung der Rückstellung („Rückstellimpuls“); (11') Rückstellimpuls für die Rückstellung der Zählröhren der Zähleinrichtung (vgl. Abb. 5). Man beachte die zeitliche Versetzung der Impulse!

Der gespeicherte Wert des Auszählgergebnisses kann vom Speicher direkt abgelesen werden. Darüber hinaus ist jede Speicherstellung am Meßpunkt (7), Abb. 2

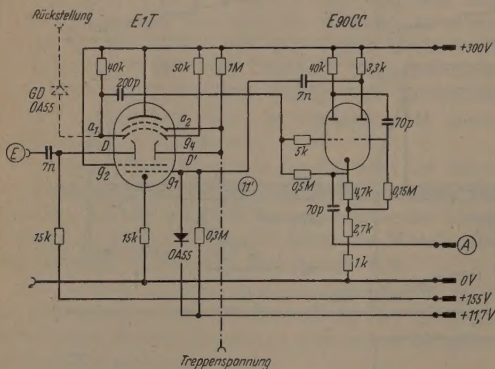


Abb. 5. Grundschialtung einer Zählstufe mit der Zählröhre E1 T (vgl. [2]). Auf die gestrichelt und strichpunktirt eingezeichneten Linien wird im Text eingegangen (4.2)

und 3 — ebenso wie oben bei den Dekaden — eindeutig mit einer bestimmten Spannung verknüpft. Diese Spannung wird über einen Kathodenverstärker ( $KV_2$ , Abb. 2), einem Schnellschreiber (SS) bzw. über eine Integratoranordnung (I) einem normalen Schreiber (Sch) zugeführt.

#### 4.2. Schalteinheiten

Die beiden Einzeldekaden der Zähleinrichtung (ZE) sind mit dekadischen Zählröhren E1 T aufgebaut. Die Wirkungsweise einer mit dieser Röhre aufgebauten

Zählstufe (Abb. 5) besteht im folgenden [2]: jeder von Eingang E auf die Ablenkplatte D der Zählröhre gelangende, passend geformte, positive Impuls (vgl. [2] dort Abb. 7) lenkt den Elektronenstrahl in der Röhre ein Stück ab und bringt ihn aus einer der zehn stabilen Stellungen in die jeweils nächste. Diese Stellungen sind am Aufleuchten eines der zehn (mit 0 bis 9 bezeichneten) Leuchtfenster des Röhrenkolbens zu erkennen. Für jede Strahlstellung ist der Strahlstrom auf die Anode  $a_2$  größer als in der vorhergehenden. Die Anodenspannung  $U_{a2} = U_D$ , hat dementsprechend in Abhängigkeit von der Anzahl der gezählten Impulse den oben erwähnten, treppenförmigen Verlauf.

Die Wirkung des „zehnten“ Impulses bedarf in diesem Zusammenhang einer besonderen Betrachtung. Dieser Impuls führt zu einer Ablenkung des Elektronenstrahls auf die Rückstellanode  $a_1$ , wodurch an dieser Elektrode ein negativer Impuls entsteht. Dies führt über die Doppeltriode E90 CC zu einem negativen Spannungsimpuls auf das Gitter  $g_1$  der Zählröhre, wodurch der Strahlstrom der E1 T vollständig gesperrt wird; gleichzeitig liefert die Doppeltriode auf der Ausgang A einen positiven Zählimpuls für eine nachgeschaltete gleiche Dekade. Nach dem Abklingen des Sperrimpulses auf das Gitter  $g_1$  der Zählröhre nimmt der Elektronenstrahl wieder die zur höchsten Treppensstufe (Fenster „0“) gehörende Stellung an.

Abweichend von diesem (üblichen) Gebrauch wird hier jedoch die Rückstellung nicht nur durch jeden „zehnten“ Impuls vorgenommen; sie kann vielmehr auch noch durch einen Impuls (11, Rückstellimpuls) eingeleitet werden, der über eine Germaniumdiode (GD, Abb. 5 gestrichelt eingezeichnet) in gleicher Weise wie ein „zehnter“ Impuls (Ablenkung des Elektronenstrahls auf  $a_1$  und damit Erniedrigung der Spannung an  $a_1$ ) auf die Zählstufe einwirkt.

Derartig aufgebaute Zählstufen finden sich in der Schaltanordnung (Abb. 6) des Statistikprüfers zweimal — Einer- und Zehnerdekade (e) und (z) — wieder (Abb. 6, Rö 1 bis 4). Sie werden — ebenfalls abweichend vom üblichen Gebrauch — hier nicht nur zur Anzeige des Zählzustandes am Leuchtfenster, sondern gleichzeitig zur Lieferung der „Treppenspannungen“ ausgenutzt (Abb. 5 strichpunktirt eingezeichnet). Die Treppenspannung der Einerdekade (e) wird über einen Kathodenverstärker ( $KV_1$ , Rö 5) an die Torschaltung  $T_1$  (Rö 7 und 7a) weitergegeben. Die Treppenspannung der Zehnerdekade wird dagegen direkt an den Diskriminator (D, Rö 6) weitergeleitet; sein Ausgangssignal (4) — ein Ausgangssignal entsteht nur für die Stellung „9“ der Zehnerdekade — wird zur Steuerung der Torschaltung  $T_1$  verwendet.

Diese Torschaltung besteht aus zwei kathodengekoppelten Penthoden (Rö 7 und 7a) in einer Differenzverstärkerschaltung. In dieser Schaltanordnung ist die Penthode Rö 7 stromleitend, solange sie nicht vom Diskriminator (D, Rö 6) her gesperrt wird. Diese Sperrung findet aber nur in der Stellung „9“ der Zehnerdekade (z, Rö 3) statt. Nur in diesem Falle wird die Ausgangsspannung des Kathodenverstärkers  $KV_1$  (Rö 5) an das Abfrage-Tor  $T_2$  (Rö 8) weitergegeben. Während der übrigen Schaltzustände der Zehnerdekade (z, Rö 3) ist die Penthode Rö 7 stromleitend. Wegen des vorgeschalteten Widerstandes kann die Anodenspannung dieser Penthode nicht mehr den vollen Wert der Ausgangsspannung des Kathoden-



verstärkers  $KV_1$  (Rö 5) annehmen. In diesen Fällen nimmt vielmehr die Anodenspannung von Rö 7 einen von der Ausgangsspannung des Kathodenverstärkers  $V_1$  (Rö 5) unabhängigen, stets gleichen Ruhewert an.

Das Abfragegerät  $T_2$  besteht aus einem „getasteten“ Kathodenverstärker (Rö 8 und 10a). Zwischen den Abfrageimpulsen (Rö 10a gesperrt) stellt sich das Gitter des rechten Systems von Rö 8 durch Gitterstrom auf etwa 280 V ein. Die Kathode folgt auf diesen

elfte Aussage in einem elften stabilen Zustand vom Speicher aufgenommen werden. Die Speicherung einer elften Aussage ist mit Hilfe der Rückstellanode  $a_1$  möglich<sup>1</sup>.

Hierzu ist es nur erforderlich, den Vorwiderstand der Rückstellanode  $R_{a1}$  nicht an die Betriebsspannung, sondern zusätzlich noch an die bereits verbundenen Elektroden  $a_2$  und  $D'$  (vgl. Abb. 5) zu legen. Durch die Verbindung der Rückstellanode  $a_1$  mit der

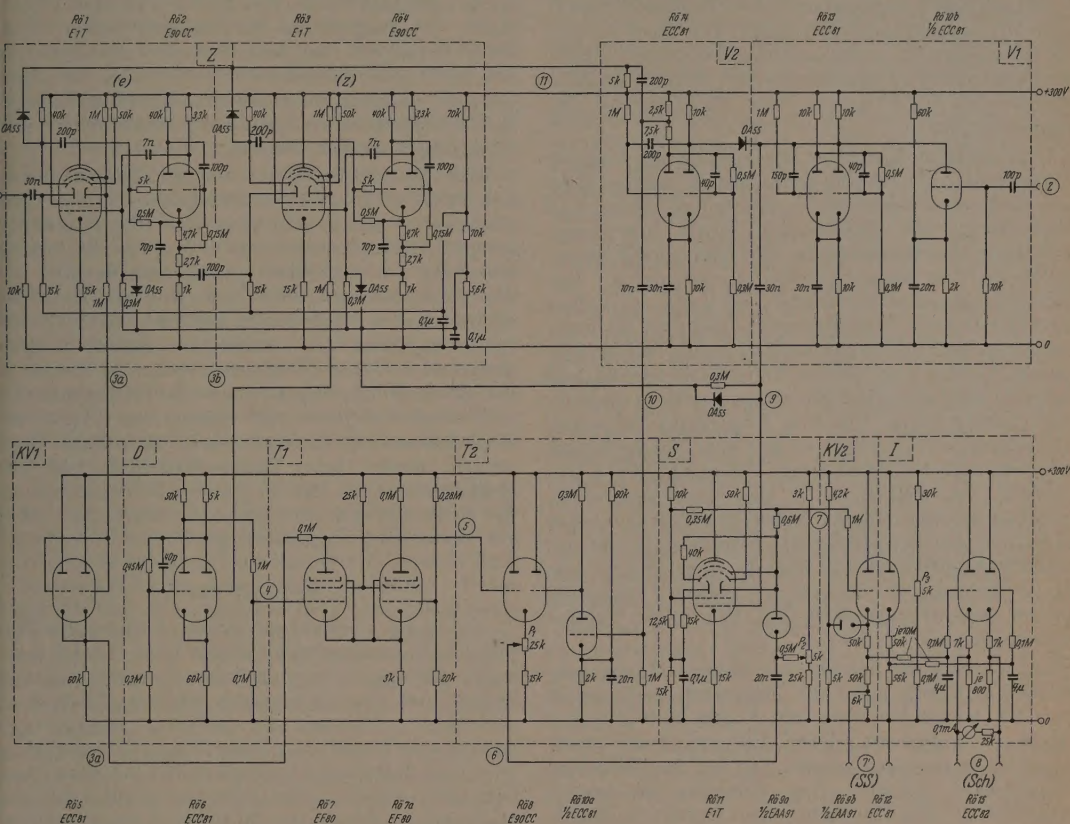


Abb. 6. Betriebsschaltbild des Statistikprüfers. (Die in den Kreisen stehenden Ziffern beziehen sich auf die in Abb. 2 erwähnten Meßpunkte)

Spannungswert. Das linke System ist in diesem Falle gesperrt, weil das linke Gitter nur die Einer-Treppenspannung zwischen etwa 240 und 110 V bzw. die noch niedrigere Ruhespannung (etwa 35 V) hinter dem  $T_1$  annehmen kann. Wird dagegen durch den positiven Abfrageimpuls (10, Abb. 4) auf die sonst gesperrte Triode Rö 10a das Gitter des rechten Systems von Rö 8 auf etwa 30 V heruntergetastet, so wird jetzt das rechte System von Rö 8 gesperrt, die Kathode der Rö 8 stellt sich für die Dauer der Tastung auf den in diesem Augenblick am linken Gitter liegenden Treppenspannungswert ein. Dieser Spannungswert wird dann auf den Speicher weitergegeben.

Zur Speicherung des abgefragten Wertes wird ebenfalls eine dekadische Zählröhre E1 T (Rö 11) verwendet. In dieser Röhre müssen jedoch hier nicht nur zehn Aussagen (0 bis 9) gespeichert werden. Hat nämlich die Zählung zu einem aus dem Speicherbereich herausfallenden Ergebnis ( $A_i = 0 \dots 89$ , oder  $\geq 100$ ) geführt, so muß auch dieses „negative“ Ergebnis als

Ablenkplatte  $D'$  ist die Stellung des Elektronenstrahls auf dieser Rückstellanode ebenfalls stabil; in dieser Stellung leuchtet keines der mit 0 bis 9 bezeichneten Leuchtfenster der Röhre auf, es wird also in gewünschter Weise kein Wert optisch angezeigt.

Die Speicherung der Anzeigewerte (6) in Rö 11 ist allerdings — solange Rö 11 in der normalen Betriebsschaltung betrieben wird — nicht ohne weiteres möglich. Die Stufen der Einertreppenspannung werden nämlich durch die beiden zwischen Rö 1 und Rö 11 liegenden Kathodenverstärker Rö 5 und Rö 8 zusammengedrückt und ein wenig zu höheren Gleichspannungswerten hin verschoben. Die Charakteristik der Speicher-E1 T (Rö 11) muß diesem Umstand angepaßt werden. Dazu macht man am einfachsten den Elektronenstrahl in Rö 11 durch Herabsetzung der

<sup>1</sup> Die Rückstellanode  $a_1$  der Speicherröhre (Rö 11) wird hier nicht für eine Rückstellung benötigt; diese Röhre soll bei der Abfrage nur auf einen Zahlenwert 0–9 bzw. auf einen nicht angezeigten Ruhewert „R“ eingestellt werden.



Beschleunigungsspannung  $U_{g_2}$  und der Spannung an der festen Ablenkplatte  $U_D$  „weicher“. Dann sind den elf stabilen Stellungen des Elektronenstrahls insgesamt kleinere Spannungsstufen an  $a_2$ ,  $D'$  und  $a_1$  zugeordnet. Diese „Stauchung“ ist bei der hier beschriebenen Anordnung so weit getrieben, daß sie die durch die Kathodenverstärker R5 und R8 bewirkte „Stauchung“ der Treppenspannungsstufen der Einerdekade noch übertrifft<sup>1</sup>.

Durch die Verwendung des Potentiometers  $P_1$  (Abb. 6) als Kathodenwiderstand von R8 können die Treppenspannungsstufen — bis auf einen konstanten Gleichspannungsanteil — den Stufen der stabilen Anodenspannungen  $U_{a_2} = U_{D'} = U_{a_1}$  der Speicherröhre angepaßt werden.

Im einzelnen laufen bei der Speicherung folgende Vorgänge ab: den verschiedenen zu speichernden Werten sind verschieden große Spannungsimpulse (8) zugeordnet. Die Einkopplung dieser Spannungsimpulse auf die Speicherröhre wird über einen Kondensator und die Diode (R9a) vorgenommen. Das Kathodenpotential der Diode wird dabei am Potentiometer  $P_2$  (Abb. 6) so eingestellt, daß dem Dach der verschiedenen Spannungsimpulse gerade wieder diejenige Spannung an  $D'$  der Röhre 11 entspricht, die zu einer Einstellung des Elektronenstrahls in die richtige Stellung führt. Um diese Einstellung vornehmen zu können, muß durch einen mit dem Abfrageimpuls (10) einsetzenden, aber schon vorher abgeklungenen Impuls (9), Abb. 4) auf  $g_1$  der Speicherröhre der Elektronenstrahl in dieser Röhre unterdrückt worden sein, weil die Einstellung der Spannung  $U_{D'}$  an der Ablenkplatte  $D'$  der Röhre 11 über die Diode (R9a) nur in der Richtung von höherer zu niedrigerer Spannung (von 0 nach 9) möglich ist (vgl. Prinzip der Ziffernvorwahl in [3]).

Zur Erzeugung der für den Abfragevorgang notwendigen Impulse dient die Steuerstufe ( $St$ ); sie ist aus den beiden Univibratoren  $V_1$  und  $V_2$  in üblicher Weise [1] aufgebaut. Beide Univibratoren werden durch einen positiven Impuls (9) auf das Gitter der Triggeröhre (R10b) vom Zeitgeber gleichzeitig ausgelöst.  $V_1$  (R13) liefert einen negativen Impuls (9), 50  $\mu$ sec, Abb. 4); er dient zur Löschung der Speicherröhre R11.  $V_2$  (R14) liefert einen positiven Impuls (10). Dieser Impuls öffnet über die Triggeröhre (R10a) das Abfrage-Tor (R8); er ist etwas länger (60  $\mu$ sec gegenüber 50  $\mu$ sec) als (9) und sorgt somit dafür, daß sich nach dem Abklingen von (9) der Speicher auf das von  $T_2$  gelieferte Signal einstellen kann. Die negative Rückflanke dieses Impulses wird — über ein RC-Glied „differenziert“ (11) — zur Rückstellung der Zähldekaden verwendet.

Die dem gespeicherten Zählergebnis entsprechende Anodenspannung  $U_{a_2} = U_{D'}$  der Speicherröhre (R11) steuert einen Kathodenverstärker ( $KV_2$ , R12). Für die Strahlstellungen 0–9 in der Speicherröhre R11 liegen die zugehörenden Spannungen in jeweils gleichen Abständen; die zur stabilen Stellung des Elektronen-

strahls auf der Rückstellanode  $a_1$  gehörende Spannung liegt jedoch wesentlich tiefer als die Spannung in Strahlstellung „9“. Damit durch diesen Umstand bei der Registrierung nicht die Werte 0 bis 9 zu eng aneinander und die elfte Spannung weitab geschrieben werden, muß die elfte Treppenstufe der Anodenspannung  $U_{a_2} = U_{D'} = U_{a_1}$  der Speicherröhre in ihrer Größe an die übrigen Treppenspannungen angepaßt werden. Dazu wird die Kathode des Kathodenverstärkers ( $KV_2$ ) (linkes System von R12) mit der zweiten Hälfte der Doppeldiode (R9b) festgehalten. Diese Diode verhindert, daß beim Absinken der Spannung am Gitter des Kathodenverstärkers  $KV_2$  die Spannung der Kathode zu weit nach unten folgt. An die Kathode dieser Röhre kann der Schnellschreiber ( $SS$ ) direkt angeschlossen werden.

Zur Dauerregistrierung des Mittelwertes der in mehreren aufeinanderfolgenden Zeitgeberintervallen ausgezählten Ereignissen dient eine Integratoranordnung ( $I$ ) (Zeitkonstante etwa 40 sec); sie ist, um die Meßwerke des eingebauten Anzeigeeinstrumentes und des angeschlossenen Schreibers ( $Sch$ ) vor Einschaltstößen und bei Störungen zu schützen, völlig symmetrisch ausgeführt. Die veränderliche (Speicher-) Spannung und die feste (Vergleichs-) Spannung werden an den Kathoden der Doppeltriode (R12) abgenommen und über zwei gleiche RC-Glieder den Gittern der Doppeltriode (R15) zugeführt. Auf diese Weise steigen, speziell beim Einschalten, Meß- und Vergleichsspannungen mit der gleichen Zeitkonstante an; die Meßwerke der verwendeten Instrumente sind so vor Überlastung weitgehend geschützt.

### 4.3. Maximale Zählrate

Die in 4.2. beschriebene Grundschialtung der Zählröhre E1T ist für eine maximale Rate von  $10^4$  regelmäßig aufeinanderfolgenden Impulsen/sec bestimmt. Folgen zwei Impulse in einem kürzeren Abstand als  $n \cdot 10^{-4}$  sec aufeinander, so werden die Impulse nicht mehr einzeln gezählt [2]. Dieser Mindestimpulsabstand wird beim Betrieb des Statistikprüfers mit der optimal benutzten 40fachen Voruntersetzung selbst für eine statistische Zählrate von  $1 \cdot 10^4 \text{ sec}^{-1}$  nur in seltenen Fällen erreicht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einer statistisch streuenden Impulsfolge mit der Rate  $r$  nach einer Voruntersetzung um den Faktor  $f$  zwei Impulse innerhalb der Zeit  $\tau$  aufeinanderfolgen, wird nämlich nach den Regeln der Statistik durch

$$W(\tau, r, f) = \left(\frac{r\tau}{f}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\left(\frac{r\tau}{f}\right)}$$

gegeben. Für den hier betrachteten Fall wird

$$W = 0,3\%.$$

Der hierdurch bedingte Anzeigefehler bei der Untersuchung einer Zählimpulsfolge dürfte in den meisten Fällen zu vernachlässigen sein.

Die obere Grenze für die Rate der zu untersuchenden Impulsfolge wird demnach in der optimalen Betriebsschialtung  $f=40$  wesentlich von dem Auflösungsvermögen des Voruntersetzers ( $U_1$ , Abb. 1) bestimmt. In der vorliegenden Meßanordnung (diese Teile der Meßanordnung sind hier nicht besonders beschrieben; vgl. die Bemerkungen zu 4.) besteht dieser Vorunter-

<sup>1</sup> Diese Stauchung kann grundsätzlich bei jeder E1T vorgenommen werden; jedoch ist nicht bei jeder E1T in „gestauchter“ Betriebsschialtung die jeweilige stabile Strahlstellung mit dem Aufleuchten nur eines der Anzeigefenster verbunden (unterschiedliche Systemjustierung der E1T). Aus einer größeren Anzahl von Zählröhren kann man sich jedoch immer geeignete Stücke herausuchen.



etzer aus zwei hintereinandergeschalteten Unteretzern mit den Untersetzungsfaktoren 4 und  $10^1$ .

In dem ersten Untersezter werden für die Schaltung teile Penthoden, im zweiten Zählröhren E1 T benutzt. Das Auflösungsvermögen dieser Anordnung dürfte mit etwa  $2 \cdot 10^{-6}$  sec anzusetzen sein.

#### 4.4. Die Prüfung der ordnungsgemäßen Funktion des Statistikprüfers

Zur Prüfung des Statistikprüfers kann man in folgender Weise vorgehen: auf den Eingang (①) „Zählrate“ wird aus einem Impulsgenerator eine Impulsfolge (Prüfimpulse) mit einer den normalen Zählraten angepaßten Frequenz gegeben. Außerdem wird dieselbe Impulsfolge, in einem vorwählbaren Untersezter [3] z. B. 95fach untersetzt, auf den Eingang (②) „Zeitgeberrate“ geleitet. Unter diesen Umständen muß, wenn der „Zeitgeberimpuls“ in die Meßanordnung gelangt, in der Zählleinrichtung jedesmal der Zählzustand „95“ erreicht worden sein; der Speicher muß den Wert „5“ anzeigen. Entsprechend muß bei einer anderen Einstellung des Zeitgeberuntersetzers (90fach bis 99fach) der Speicher nacheinander alle seine möglichen Stellungen annehmen.

An dieser ordnungsgemäßen Funktion der Meßanordnung darf bei einer Änderung der Frequenz der Prüfimpulse und ebenso auch bei einer Umschaltung des Untersetzungsfaktors  $f$  der Voruntersezter keine Störung zu beobachten sein.

Eine verfeinerte Methode zur Prüfung der Meßanordnung besteht in folgendem: die Folge der Prüfimpulse wird sowohl dem Eingang (①) „Zählrate“ als auch dem Eingang (②) „Zeitgeberrate“ jeweils über einen vorwählbaren Untersezter zugeleitet. Dabei können die Untersetzungsfaktoren  $v_1$  und  $v_2$  dieser beiden Untersetzer so gewählt sein, daß ihr Quotient  $v_1/v_2$  eine ganze Zahl im Bereich zwischen 90 und 99 bildet; dies ist z. B. für  $v_1 = 945$  und  $v_2 = 10$  mit  $v_1/v_2 = 94,5$  der Fall. Unter diesen Umständen wird der Speicherwert beständig zwischen den Werten „4“ und „5“ hin und her springen, und zwar so, daß — der Abweichung um 0,5 von einer ganzen Zahl entsprechend — in der einen Hälfte der Beobachtungszeit der Wert „4“ und in der anderen Hälfte der Wert „5“ angezeigt wird. Für eine andere Abweichung von einem ganzzahligen Wert gelten entsprechende Überlegungen.

Auf diese Weise läßt sich insbesondere die ordnungsgemäße Funktion der Integrationsstufe (I, Abb. 2 und 6) und des angeschlossenen Schreibers (Sch) prüfen. Bei einer im Verhältnis zur Zeitgeberperiode genügend großen Integrationszeit muß vom Schreiber ein zwischen den Werten (hier 4 und 5) liegender Strich beschrieben werden. Auf diese Weise kann auch über längere Zeiten hin, insbesondere in der Zeit zwischen der Benutzung der Meßanordnung zu Meßzwecken, die Anfälligkeit der Meßanordnung gegen irgendwelche Störungen fortlaufend geprüft werden.

#### 5. Beispiele für die Überprüfung

der statistischen Streuung und des zeitlichen Verlaufs einer Zählimpulsfolge

In Abb. 7 ist ein Registrierstreifen wiedergegeben, der den zeitlichen Verlauf und die statistische Streuung einer Zählimpulsfolge zeigt.

<sup>1</sup> Dieser Untersetzungsfaktor ist in den Stufen 3, 10, 30, 100 umschaltbar, vgl. Tabelle 1.

ung einer Zählimpulsfolge zeigt. Diese Zählimpulsfolge rührt aus der Untersuchung eines  $^{60}\text{Co}$ -Präparates in einer Szintillations-Spektrometer-Anordnung her. Die Zerfallsrate dieses Präparates ( $T_{1/2} = 5,3 \text{ a}$ ) kann über die Beobachtungszeit hin als konstant angesehen werden. Man erkennt deutlich den statistischen Charakter der einzelnen Auszählergebnisse, und zwar auch dann noch, wenn wie hier ein Schreiber nur ein über mehrere Abfragen hin gemitteltes Ergebnis registriert. Die zeitliche Konstanz des Mittelwertes — hier eine Aussage darüber, daß die zeitliche Konstanz der Betriebseigenschaften des Szintillations-Spektrometers besser als 1% war — tritt aus der Registrierung offensichtlich hervor.

Will man den statistischen Charakter der Schwankungen der Zählrate um ihren Mittelwert noch besonders verdeutlichen, so kann man in der üblichen Weise über dem Speicherbereich 90 bis 99 in einem Diagramm auftragen, wie viele Male ein bestimmtes Zählergebnis im Verlauf aufeinanderfolgender Zeitgeberintervalle angenommen wird („Glockendiagramm“, Abb. 8). Man erkennt aus dieser Darstellung leicht den Mittelwert und den statistischen Charakter der zu untersuchenden Zählrate.

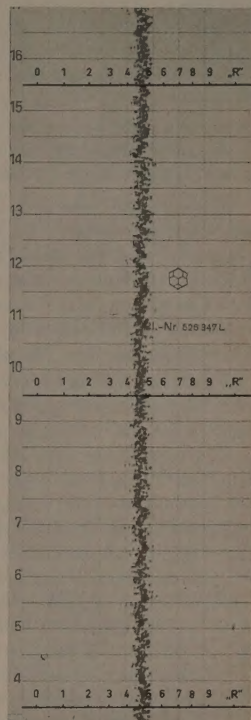


Abb. 7. Registrierstreifen einer statistisch streuenden Zählrate ( $^{60}\text{Co}$ -Präparat). Zeitgeberintervall 18,2 sec; Voruntersetzung 400fach; Integrationszeit 40 sec; Punktfolge 20 sec; abzulesender Mittelwert  $A = 94,6$ ; Impulsfolge mit echter Statistik,  $r = 2077 \text{ sec}^{-1}$

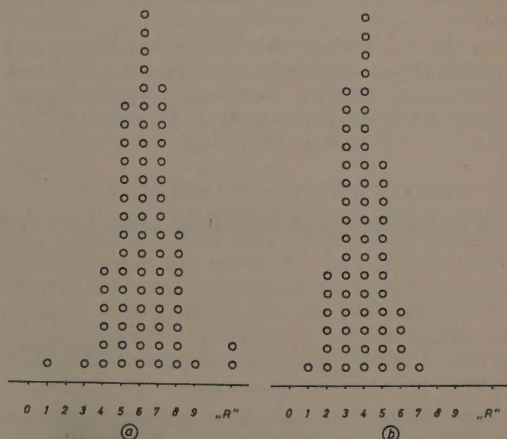


Abb. 8 a u. b. „Glockendiagramm“ einer statistisch streuenden Zählrate ( $^{60}\text{Co}$ -Präparat). Zeitgeberintervall 2,93 sec; Voruntersetzung 40 fach; 0–9 Anzeigewerte  $A_1 = 90 \dots 99$ ; „R“: Anzeigewerte  $A_1 \leq 89$  oder  $\geq 100$ ; Mittelwert a)  $A = 96,1$ , b)  $A = 93,9$ . Die beiden „Glockendiagramme“ sind in einem zeitlichen Abstand von etwa 25 min aufgenommen. (Aufnahmedauer für ein Diagramm etwa 3 min)



In Abb. 8 sind zwei „Glockendiagramme“ dargestellt, die an einem  $^{42}\text{K}$ -Präparat unter gleichen Bedingungen (gleiche Voruntersetzungen, gleiche Zeitgeberintervalldauer) jeweils für 60 Zeitgeberintervalle etwa 25 min nacheinander aufgenommen sind. Man erkennt aus der Verschiebung des Mittelwertes den Abfall der Zählrate mit der Halbwertszeit des  $^{42}\text{K}$  von rund 12 h.

## 6. Die Überprüfung des gesetzmäßigen Verlaufes zeitlich veränderlicher Zählimpulsfolgen

In den bisherigen Betrachtungen über die Funktion des Statistikprüfers und seine Verwendung wurde vorausgesetzt, daß der Mittelwert der zu untersuchenden Zählrate zeitlich konstant ist. Der Statistikprüfer liefert in diesem Falle eine Aussage darüber, ob diese Forderung erfüllt ist und inwieweit die auftretenden Schwankungen im Rahmen der zu erwartenden statistischen Schwankungen liegen, oder ob die gerade zu überprüfende Rate im Mittel einen zeitlichen Gang zeigt (vgl. Beispiel Abb. 8).

Demgegenüber scheint die Anwendbarkeit des in der Anordnung benutzten Prinzips zu versagen, wenn das Verhalten einer zeitlich veränderlichen Zählrate untersucht werden soll. Dieser Fall liegt z.B. vor, wenn die auszumessende Zählrate von einem radioaktiven Präparat herrührt, das mit einer so kurzen Halbwertszeit zerfällt, daß die durch das Zerfallsgesetz vorgeschriebene zeitliche Abnahme der Zählrate über die Dauer der Messung (Aufnahme einer Glockenkurve. Integrationszeit der Integrationsstufe) nicht mehr vernachlässigt werden darf.

Bei der Untersuchung zeitlich veränderlicher Zählraten sind indes zwei verschiedene Problemstellungen zu unterscheiden. Einmal wird es sich bei solchen Untersuchungen darum handeln, das Gesetz des zeitlichen Verlaufs selbst festzustellen. Solchen Untersuchungen sind Messungen mit den üblichen Zählratenmessern am besten angepaßt. Zum anderen wird es sich bei derartigen Untersuchungen darum handeln, festzustellen, inwieweit ein einmal bestimmter und weiterhin als gültig angenommener zeitlicher Verlauf von der zu untersuchenden Zählrate auch wirklich eingehalten wird.

In diesem zweiten Falle kann das Prinzip des Statistikprüfers mit dem gleichen Gewinn wie bei der Untersuchung zeitlich konstanter Raten benutzt werden, sofern man nur dafür sorgt, daß das Zeit-

geberintervall nicht gleichmäßig, sondern der erwarteten Gesetzmäßigkeit entsprechend zeitlich veränderlich vorgegeben wird.

Rührt z.B. die auf ihre „Konstanz“ zu untersuchende Zählrate von einem radioaktiven Zerfall her, so wird man das Zeitgeberintervall der Halbwertszeit des Zerfalls entsprechend laufend exponentiell vergrößern müssen. Stimmt dabei das Gesetz der Intervallvorgabe mit dem zeitlichen Verlauf der zu überprüfenden Zählrate überein, so wird man im Mittel wiederum stets die gleiche Anzahl von Zählereignissen im Zählintervall erwarten dürfen, genau so, als ob es sich um die Untersuchung einer im Zeitmittel konstanten Rate handelte. Alle dort abgeleiteten Beziehungen behalten damit auch in diesem Falle ihre Gültigkeit.

Die hierzu notwendige veränderliche Vorgabe des Zeitgeberintervalles kann bei langsam veränderlichen Zählraten einfach dadurch vorgenommen werden, daß man in der oben beschriebenen Anordnung das Zeitgeberintervall im Verlauf der Zeit immer wieder neu einstellt.

Auf ein Verfahren zur kontinuierlichen Veränderung des Zeitgeberintervalles in einer der Gesetzmäßigkeit der zu untersuchenden Zählrate entsprechenden Weise wird in einer späteren Arbeit einzugehen sein.

## Zusammenfassung

Zur laufenden Überprüfung des Mittelwertes und der statistischen Schwankungen einer Impulsfolge wurde ein Gerät entwickelt, das frei von den Beschränkungen des counting-rate-meter-Verfahrens die Zählrate einer Impulsfolge mit hoher Genauigkeit ( $< 0,5\%$ ) zu registrieren gestattet und gleichzeitig laufend einen Überblick über den statistischen Charakter der untersuchten Impulsfolge zuläßt.

Herrn Professor Dr. W. WALCHER danken wir für sein stets förderndes Interesse und zahlreiche Diskussionen.

**Literatur:** [1] ELMORE, W.C., and M. SANDS: Electronics, Experimental Techniques. New York: McGraw-Hill Company 1949. — [2] Technische Informationen für die Industrie, Valvo GmbH., Hamburg 1, Heft 2s: Die dekadische Zählrohre E1 T. — [3] Technische Informationen für die Industrie, Valvo GmbH., Hamburg 1, Heft 4s: Ziffernvorwahl mit der E1 T.

Dr. U. CAPPELLER, und Dipl.-Phys. W. ZIMMERMANN,  
Physikalisches Institut,  
Marburg a.d. Lahn, Renthof 5

# Stabilisierung und Steuerung eines Elektromagneten unter Verwendung der magnetischen Protonenresonanz

Von H. ANDRESEN

Mit 7 Textabbildungen

(Eingegangen am 9. April 1957)

## 1. Einleitung

Zur Bestimmung magnetischer Kernmomente nach der Kerninduktionsmethode [1, 2, 3], insbesondere aber zur Vermessung von Resonanzfrequenz und Linienbreite der schwachen Signale extrem kleiner Kernmomente, wird ein gut homogenes Magnetfeld mit hoher zeitlicher Konstanz benötigt.

Für diese Zwecke stand ein wassergekühlter, niederohmiger<sup>1</sup> 3 kW-Magnet zur Verfügung, mit dem

<sup>1</sup> Der Realteil des Feldwicklungswiderstandes vom Magneten betrug  $40\ \Omega$ ; der Imaginärteil des Widerstandes entsprach für Frequenzen kleiner als 0,3 Hz einer Induktivität von etwa 40 Hy und strebte für höhere Frequenzen wegen der in Eisenkern und Aluminiumspulenkörpern induzierten Wirbelströme gegen Null.



sich im Dauerbetrieb bei einem Polschuhabstand von 3 cm und einem Polschuhdurchmesser von 14 cm eine Feldstärke von 11000 Oe erreichen ließ. Zur Stromversorgung des Magneten diente ein Umformeraggregat, bei dem der Felderregerstrom des Gleichspannungsgenerators mit einem Leistungsverstärker gesteuert werden konnte. Die Feldinhomogenität, die eine untere Grenze für die in Oersted ausgedrückte Linienbreite der Resonanzkurven darstellt, konnte durch sorgfältiges Justieren und Einschleifen der Polschuhe über ein Probenvolumen von 18 cm<sup>3</sup> auf 0,1 Oe herabgedrückt werden. Da die Zeit, während der die Feldschwankungen klein gegenüber der Linienbreite sind, die obere Grenze für die Zeitkonstante und damit auch für die Nachweisempfindlichkeit einer Kernresonanzapparatur bestimmt, können bei 11000 Oe die durch die Feldinhomogenität von 0,1 Oe vorgegebenen Anwendungsmöglichkeiten des Magneten für Kernresonanzversuche nur dann voll ausgenutzt werden, wenn die relativen Feldschwankungen über einen Zeitraum von mehreren Stunden möglichst bis auf  $\Delta H/H = 10^{-6}$  herabgedrückt werden können. Außerdem muß das Magnetfeld, wenn Kernresonanzapparaturen mit konstanter, quarzstabilisierter Senderfrequenz verwendet werden, zum Suchen unbekannter Signale langsam über große Bereiche zeitlich linear verändert werden können. Die Geschwindigkeit der Feldänderung richtet sich nach der Zeitkonstanten der Nachweisapparatur: für empfindliche Nachweisapparaturen mit großen Zeitkonstanten sollte der Betrag des Feldanstieges von maximal 360 Oe/Std bis herunter zu 0,2 Oe/Std variiert werden können, wobei die Abweichungen des Magnetfeldes von dem durch eine Steuerung vorgegebenen Feldverlauf stets klein gegenüber den Linienbreiten der nachzuweisenden Kernresonanzen bleiben müssen.

## 2. Die Störquellen

Die Konstanz des Magnetfeldes wird durch zwei Störquellen beeinträchtigt. Thermische Effekte bestimmen die langsamen Schwankungen und eine Drift des Feldes, während Feldänderungen hoher Frequenz bis herunter zu etwa 0,002 Hz den Spannungsschwankungen des Generators zuzuschreiben sind.

Die Spannung des Gleichstromgenerators, der von einem Asynchronmotor angetrieben wurde, wurde mit einem LC-Glied, dessen Resonanzfrequenz 7 Hz

betrug, gesiebt; diese Siebung unterdrückte die hohen „Kommutatorfrequenzen“ und die höheren Harmonischen der Generator-tourenzahl vollkommen; ein Restanteil der Grundfrequenz von etwa 16 Hz und Spannungsschwankungen tiefer Frequenz blieben übrig, die durch Änderungen von Netzspannung bzw. Netzfrequenz hervorgerufen werden.

In Tabelle 1 sind die nach der LC-Siebung in vier verschiedenen Frequenzbereichen übrigbleibenden maximalen prozentualen Spannungs- und Magnetfeldschwankungen eingetragen, wobei in der letzten Spalte der Regelfaktor verzeichnet ist, der von einer Regelanordnung mindestens erreicht werden muß, um die Feldschwankungen auf die geforderte  $\Delta H/H = 10^{-6}$  Grenze herunterzudrücken.

## 3. Der Protonenregelkreis

Über kurze Zeiten kann eine Feldkonstanz von  $\Delta H/H = 10^{-6}$  durch eine Stabilisierung des Magnetstromes erreicht werden; der Entwurf und die Ausführung einer Stromstabilisation, die die Stabilitätsforderung  $\Delta H/H = 10^{-6}$  über einen Zeitraum von 3 min erfüllen sollte, wird von SOMMERS, WEISS und HALPERN [4, 5] beschrieben.

Wenn jedoch eine Langzeitkonstanz von  $10^{-6}$  gefordert wird, ist eine Stromstabilisierung nicht mehr ausreichend, weil sie langzeitige Feldschwankungen, die durch eine temperaturabhängige Änderung der Magnetgeometrie und der Permeabilität hervorgerufen werden, nicht mehr wegregelt. Außerdem besteht bei einer Stromstabilisierung wegen der Hysterese kein eindeutiger Zusammenhang zwischen Vergleichsgröße und Feld. Diese Nachteile fallen bei einer Feldregelung mit Hilfe von Protonenresonanzen [6—9] weg. Darüber hinaus bietet eine Protonenregelung den Vorteil, daß die Größe, mit der das Magnetfeld verglichen wird, eine Frequenz ist, deren thermische Drift gut kompensiert werden kann. Ein gewisser Nachteil besteht darin, daß aus Stabilitätsgründen die Regelgeschwindigkeit einer Protonenstabilisierung kleiner ist als die einer Stromstabilisierung. Außerdem entstehen wegen des kleinen Magnetfeldintervalles, innerhalb dessen die Regelung wirksam ist, Schwierigkeiten beim Einschalten der Protonenregelung; die Größe des Feldintervalles, die durch die Linienbreite der Resonanzkurve bestimmt wird, beträgt etwa 1 Oe<sup>2</sup>.

Der prinzipielle Aufbau der gesamten Regelanordnung wird durch das Blockdiagramm der Abb. 1 dargestellt.

Zu den Schaltelementen des Protonenregelkreises gehören neben dem Umformeraggregat ein Magnetfelddiskriminator, mit dessen Ausgangsspannung der Leistungsverstärker gesteuert wird, der den Strom für die Felderregwicklung des Generators liefert, und zwei Filter, die den mit der Stabilität des Protonenregelkreises verträglichen Frequenzgang der Kreisübertragungsfunktion  $\mu_p$  bestimmen<sup>3</sup>. Hierbei hat Filter 2 zwei Aufgaben zu erfüllen: einmal dient es

Tabelle 1

Frequenzintervall [Hz]	Störquelle	Spannungsschwankung $\Delta U/U$	Feldschwankung $\Delta H/H$	Minimaler Regelfaktor
14 bis 17	Generator	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$	20
0,2 bis 0,05	Generator	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^3$
0,01 bis 0,002	Generator (Temperatur)	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^4$
0 bis 0,002	Temperatur <sup>1</sup> (Generator)	—	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^4$

<sup>1</sup> Im Abschnitt: „Einschalten des Protonenregelkreises“ wird gezeigt, daß der Regelkreis erst dann geschlossen werden darf, wenn sich das Temperaturgleichgewicht zwischen Wasserschüttung und Feldspulen nahezu eingestellt hat, so daß die aus Temperatureffekten resultierenden Feldschwankungen die Größenordnung  $\Delta H/H = 10^{-2}$  nicht überschreiten.

<sup>2</sup> Einzelheiten können dem Abschnitt: „Das Einschalten des Protonenregelkreises“ entnommen werden.

<sup>3</sup> Betrag und Phase der Kreisübertragungsfunktion  $\mu_p$  sollen durch die Spannungsverstärkung definiert werden, die man längs des zwischen Filter 1 und Leistungsverstärker geöffneten Protonenregelkreises bei sinusförmiger Eingangsspannung messen würde.



als Stabilisierungsfilter im Protonenregelkreis und zum anderen zur Spannungsstabilisation des Generators.

Unter dem Namen „Magnetfelddiskriminator“ werden alle Schaltelemente zusammengefaßt, mit denen Abweichungen von der durch eine Senderfrequenz vorgegebenen Resonanzfeldstärke [10]

$$H_{\text{Res.}} = \frac{2\pi v_T}{\gamma}$$

$v_T$  = Senderfrequenz

$$\gamma = (2,67528 \pm 0,00006) \cdot 10^4 \text{ Oe}^{-1} \text{ sec}^{-1}$$

resonanzkurve ist, wird das Kernsignal am Hochfrequenz-Gleichrichterausgang in eine Wechselspannung umgeformt, deren Grundwellenamplitude den Betrag und deren Phase das Vorzeichen der Resonanzkurvensteigung angibt, so daß man nach einer Verstärkung in einem Niederfrequenz-Schmalbandverstärker und einer phasenempfindlichen Gleichrichtung<sup>1</sup> am Ausgang des Felddiskriminators ein Signal erhält, dessen Feldabhängigkeit die Form der differenzierten Kernresonanzkurve hat, die in Abb. 2 dargestellt ist.

Da die Regelspannungen nur im mittleren Teil dieser „Dispersionskurve“ die zur Gegenkopplung

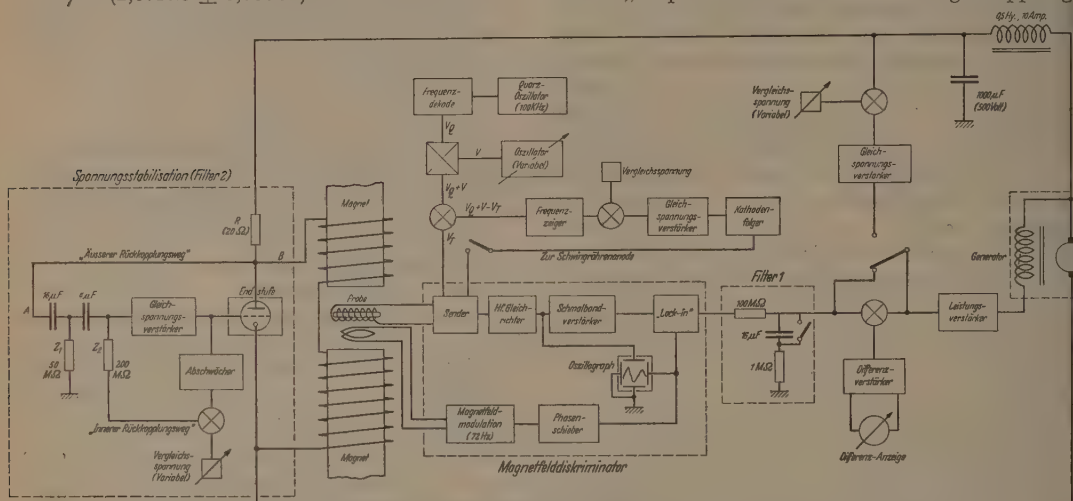


Abb. 1. Blockdiagramm der gesamten Regelanordnung. (Die mit Kreuzen versehenen Kreise bzw. Quadrate wurden als Symbole für die Bildung einer Differenz bzw. einer Addition benutzt)

in Spannungsschwankungen umgeformt werden, die zur Steuerung des Felderregerstromes vom Generator verwendet werden können: eine Protonen enthaltende

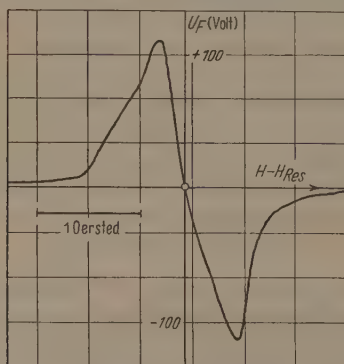


Abb. 2. Magnetfeldabhängigkeit der Ausgangsspannung  $U_F$  des Felddiskriminators. (Die Kurvenform einer differenzierten Absorptionskurve wird nur bei abgeschalteter Frequenzstabilisation erhalten)

Probe, die sich im Inneren einer Senderschwingspule befindet, absorbiert in einem schmalen Feldbereich, dessen Zentrum durch die oben angegebene Resonanzfeldstärke bestimmt wird, Energie aus dem Hochfrequenzfeld, so daß die Güte des Senderschwingkreises und damit auch die Schwingamplitude kleiner werden. Durch eine niederfrequente Magnetfeldmodulation, deren Hub vergleichbar mit der Linienbreite der Kern-

einer Feldschwankung  $\Delta H$  richtige Phasenlage haben, muß der Arbeitspunkt stets so weit von den beiden Maxima entfernt bleiben, daß die Regelspannungen nur den inneren Teil der „Dispersionskurve“ aussteuern. Um eine einfache Kontrolle darüber zu haben, ob sich das Magnetfeld innerhalb des Regelbereiches befindet, wird die Eingangsspannung des Schmalbandverstärkers auf einem Oszillographen beobachtet: wenn auf dem Bildschirm die Oberwelle der Modulationsfrequenz sichtbar ist, wird das Feld durch den Protonenregelkreis stabilisiert und stimmt in seinem Betrag mit der Resonanzfeldstärke überein.

Bei einer Veränderung der Senderfrequenz liefert der Felddiskriminator eine Regelspannung, die das Magnetfeld so mitzieht, daß die Abweichung des Feldes von der Kernresonanzbedingung gerade die zum Erreichen dieses Feldes nötige Steuerspannung liefert. Bei einer Linienbreite von 1 Oe bietet der in Tabelle 1 für tiefe Frequenzen abgeschätzte Regel-faktor die Gewähr, daß bei einer hinreichend langsamen Feldänderung von 3000 Oe nicht mehr als ein Drittel des Regelbereiches angesteuert wird.

#### 4. Der Sender

Als Sender wurde die Transition-Schaltung von H. W. KNÖBEL und E. L. HAHN [12] verwendet. Die Senderfrequenz konnte mit dem Schwingkreisdrehkon-

<sup>1</sup> Zur phasenempfindlichen Gleichrichtung wurde ein sog. „Lock in“-Verstärker [11] verwendet.



densator von 30 MHz bis 50 MHz durchgestimmt werden, so daß das Magnetfeld durch Änderung der Senderfrequenz über einen Bereich von 7000 bis 12000 Oe kontinuierlich variiert werden konnte. Für schnelle Magnetfeldänderungen bis herunter zu einem linearen Feldanstieg von 100 Oe/Std erwies es sich als ausreichend, die unstabilisierte Transitronfrequenz mit dem Schwingkreisdrehkondensator zu variieren, während langsamere Änderungsgeschwindigkeiten durch die thermische Drift der Senderfrequenz verzerrt werden würden; für eine Langzeitkonstanz von  $\Delta H/H = 10^{-6}$  ist eine Frequenzstabilisation unbedingt erforderlich.

Eine Anodenspannungsänderung der Transitronschwingröhre von 40% verstimmte die Senderfrequenz um  $0,50/_{00}$ . Dieser Steuerbereich erwies sich als ausreichend, um mit einer Steuerung der Anodenspannung die thermische Frequenzdrift zu kompensieren. Zur Umwandlung der Frequenzänderungen in Spannungsschwankungen wurde eine dekadische Frequenzmeßanlage<sup>1</sup> verwendet, in der die Differenz zwischen der Transitronfrequenz  $\nu_T$  und einer auf  $10^{-7}$  quarzstabilisierten Frequenz  $\nu_Q$  gebildet und in einem Frequenzzeiger in eine Spannung umgewandelt wird, die dem Absolutbetrag der Frequenzdifferenz proportional ist. Die Differenz zwischen der Ausgangsspannung des Frequenzzeigers und einer Vergleichsspannung steuert nach einer Gleichspannungsverstärkung einen Kathodenfolger, der die Anodenspannung der Transitronschwingröhre liefert. Die Grenzfrequenz des Frequenzstabilisierungsstromes beträgt 400 Hz; sein Regelfaktor von 750 reicht aus, um die relativen Schwankungen der Transitronfrequenz auf  $\Delta \nu_T/\nu_T \leq 3 \cdot 10^{-7}$  herabzudrücken.

Durch die Zumischung einer variablen Frequenz  $\nu$  zur quarzstabilisierten Frequenz  $\nu_Q$  kann die Transitronfrequenz verändert werden, wobei die maximale Frequenzänderung durch den Regelbereich der Frequenzstabilisation auf 20 kHz begrenzt wird. Um auch größere Frequenzbereiche überstreichen zu können, wird, wenn sich die Anodenspannung der Transitronschwingröhre den Grenzen des Regelbereiches nähert, durch Relais ein Motor eingeschaltet, der den Drehkondensator des Transistrons so lange dreht, bis sich die Frequenz wieder in der Mitte des Regelbereiches befindet<sup>2</sup>.

Die Verstimmung der Senderfrequenz  $\Delta \nu_K$ , die durch eine Kernresonanz hervorgerufen wird<sup>3</sup>, wird durch den Frequenzstabilisierungsstrom in eine Anodenspannungsänderung an der Transitronschwingröhre umgeformt, die wiederum die Schwingamplitude beeinflusst. Die Feldabhängigkeit der Schwingamplitude wird daher bei eingeschalteter Frequenzstabilisation

<sup>1</sup> Zur Frequenzstabilisation des Transistrons wurde die dekadische Frequenzmeßanlage der Firma Rhode und Schwarz, Typ XZA, 444 043 verwendet.

<sup>2</sup> Die Frequenz des variablen Oszillators ließ sich in zwei verschiedenen Bereichen, um 100 kHz bzw. um 1 kHz verändern. Da für die Stabilisation der Transitronfrequenz die erste Oberwelle der Frequenzmeßanlage benutzt wurde, betrug der größte Bereich, über den die Transitronfrequenz mit dem Frequenzregelkreis kontinuierlich verändert werden konnte, 200 kHz. Die Frequenzstabilität wird durch die Frequenzschwankungen des variablen Oszillators bestimmt, so daß es bei extrem hohen Anforderungen an die Frequenzstabilität günstig ist, den 1 kHz-Bereich des variablen Oszillators zu benutzen.

<sup>3</sup> Die Frequenzverstimmung  $\Delta \nu_K$  beim Durchlaufen der Resonanzkurve betrug  $\pm 100$  Hz.

nicht mehr durch eine reine Absorptionskurve dargestellt, sondern es überlagert sich zusätzlich ein Effekt, dessen Feldabhängigkeit ebenso wie die Frequenzverstimmung  $\Delta \nu_K$  durch eine Dispersionskurve beschrieben werden kann. Die Registrierung der Felddiskriminatorausgangsspannung über die Zeitdauer eines Resonanzdurchganges ergab die in Abb. 3 dargestellte Kurve, aus der folgt, daß der Absorptionskurvenanteil sehr klein gegenüber dem Dispersionsanteil ist.

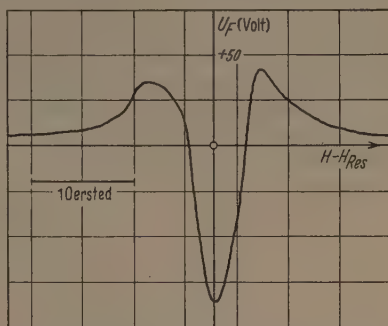


Abb. 3. Magnetfeldabhängigkeit der Ausgangsspannung  $U_F$  des Felddiskriminators bei eingeschalteter Frequenzstabilisation. (Die Registrierkurve hat die Form einer differenzierten Dispersionskurve; die Asymmetrie rührt von geringen Beimischungen einer Absorptionskurve her)

Von den beiden Nulldurchgängen der in Abb. 3 gezeigten Kurve liefert nur einer Regelspannungen mit der richtigen Phasenlage; als Vorteil ist jedoch zu erwähnen, daß die Amplitude dieser Kurve unabhängig von der Empfindlichkeitseinstellung des Transistrons ist, so daß bei einer Änderung des Magnetfeldes über große Bereiche der Regelfaktor des Protonenregelkreises konstant bleibt.

### 5. Stabilität des Protonenregelkreises

Eine Schaltung, die wie der Protonenregelkreis über nur einen Rückkopplungsweg gegengekoppelt wird, ist nach dem Kriterium von NYQUIST [13—15] stabil, wenn die Ortskurve der Kreisübertragungsfunktion  $\mu_p$  den kritischen Punkt  $-1$  nicht umschließt<sup>4</sup>. Hinreichend für die Erfüllung dieses Stabilitätskriteriums ist die Bedingung, daß die Phase von  $\mu_p$  stets kleiner als  $180^\circ$  bleibt, solange  $|\mu_p| > 1$  ist. Nach H. W. BODE [14] kann für „Phasenminimumsysteme“ die Phase der Kreisübertragungsfunktion aus dem Frequenzgang ihres Absolutbetrages berechnet werden: wenn der Absolutbetrag einer Übertragungsfunktion über mehrere Oktaven mit  $6n$  Dezibel/Oktave steigt, bzw. fällt, dann beträgt die Phase der Übertragungsfunktion für eine Frequenz im Inneren dieses Gebietes  $\pm n\pi/2$ , so daß eine gegengekoppelte Schaltung dann stabil ist, wenn der Absolutbetrag ihrer Kreisübertragungsfunktion schwächer als mit 12 Dezibel/Oktave steigt, bzw. fällt.

Der Frequenzgang der Kreisübertragungsfunktion  $\mu_p$  wird zur Hauptsache durch die beträchtlichen Phasendrehungen von Generator und Magnet bestimmt. Um für den Entwurf der Stabilisierungsfiler

<sup>4</sup> Bei dieser Formulierung ist die zur Gegenkopplung nötige Phasendrehung von  $180^\circ$  nicht mehr in  $\mu_p$  enthalten, sondern durch Vorzeichenwahl gesondert berücksichtigt worden; außerdem wird die Stabilität der Schaltung bei geöffnetem Rückkopplungsweg vorausgesetzt.



einen Anhaltspunkt für die Frequenz zu haben, bei der der Absolutbetrag von  $\mu_p$  auf 1 herabgesunken sein muß, wurden die in Abb. 4 dargestellten Phasendrehungen von Generator und Magnet experimentell bestimmt.

Für die Stabilität des Protonenregelkreises ist die Phasendifferenz zwischen der Steuerspannung am Leistungsverstärker  $\Delta U_L$  und den Feldschwankungen  $\Delta H$  allein ausschlaggebend; die anderen beiden Kurven der Abb. 4 wurden nur gemessen, um einen Überblick darüber zu bekommen, mit welchem Beitrag die einzelnen Schaltelemente an der Phasendrehung beteiligt sind. Aus den Kurven der Abb. 4 geht hervor, daß der Eisenkern des Magneten mit erheblichem Anteil zur Phasendrehung des Protonenregelkreises beiträgt; bei einer Stromstabilisierung würde dieser

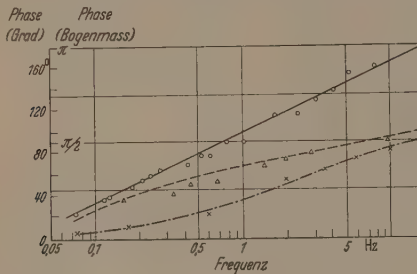


Abb. 4. Phasendrehung von Generator und Magnet in Abhängigkeit von der Frequenz. Ausgezogene Kurve: Phasendifferenz zwischen  $\Delta U_L$  und  $\Delta H$ . Gestrichelte Kurve: Phasendifferenz zwischen  $\Delta U_L$  und  $\Delta U_{\text{Magnet}}$ . Strichpunktierte Kurve: Phasendifferenz zwischen  $\Delta U_L$  und  $\Delta U_{\text{Generator}}$

Anteil wegfallen, so daß die Grenzfrequenz und damit die Regelgeschwindigkeit eines Stromregelkreises um etwa eine Größenordnung höher gewählt werden können.

Um für die Phasendrehungen der Stabilisierungsfiler einen genügenden Spielraum zu behalten, wurde beim Entwurf des Protonenregelkreises als Grenzfrequenz, oberhalb derer  $|\mu_p| < 1$  ist, 0,5 Hz veranschlagt. Da nach tiefen Frequenzen der mit der Stabilität des Protonenregelkreises verträgliche Anstieg der Kreisübertragungsfunktion  $\mu_p$  12 Dezibel/Oktave nicht überschreiten darf, wird der in Tabelle 1 geforderte Regelfaktor von der Protonenregelung allein erst für Frequenzen kleiner als 0,002 Hz erreicht. Feldschwankungen, deren Frequenzen größer als 0,002 Hz sind, haben ihren Ursprung in Spannungsschwankungen des Generators und müssen durch eine Spannungsstabilisation gesondert geregelt werden.

#### 6. Stabilisation der Generatorspannung

Die Schaltung, die zur Spannungsstabilisation verwendet wurde, kann durch die Filterwirkung eines Spannungsteilers beschrieben werden, der aus einem Ohmschen Widerstand  $R = 20 \Omega$  und dem Innenwiderstand  $R_i(\omega)$  einer stark spannungsgegeng gekoppelten Röhre besteht, dessen Frequenzabhängigkeit durch das Eingangsglied  $Z_1, Z_2$  bestimmt wird. Durch die Spannungsstabilisation werden die Spannungsschwankungen, die ohne parallel geschaltete Impedanzröhre am Magneten vorhanden sind, um den Faktor  $|1 + \mu_{sp}|$  geschwächt, wobei mit  $\mu_{sp}$  die zwischen den Punkten A und B gemessene Spannungsverstärkung bei geöffnetem „äußeren Rückkopplungsweg“ bezeichnet werden soll.

Um das Magnetfeld über größere Bereiche variieren zu können, muß der Absolutbetrag der Kreisübertragungsfunktion  $\mu_{sp}$  für tiefe Frequenzen gegen Null streben, damit die Spannungsstabilisation für die Frequenz Null nicht mehr wirksam ist. Zum Abschneiden der Verstärkung nach tiefen Frequenzen wurde trotz der damit verbundenen größeren Stabilitätsschwierigkeiten ein doppeltes RC-Glied ( $Z_1$  und  $Z_2$ ) verwendet, weil es dadurch möglich ist, das Magnetfeld zeitlich linear zu verändern, ohne die Regelung durch Arbeitspunktänderungen des Spannungsstabilisators zu beeinträchtigen. Um weitere phasendrehende Glieder zu vermeiden, wurden die Verstärkerstufen des Spannungsverstärkers durch Batterien gekoppelt. Die Gleichspannungsverstärkung betrug  $5 \cdot 10^4$ ; der Verstärker wurde breitbandig ausgelegt, so daß bis 100 kHz der Frequenzgang seiner Verstärkung allein durch die Stabilisierungsfiler bestimmt wird. Zwei Filter beginnen bei 16 Hz die Verstärkung nach hohen Frequenzen abzuschneiden; das eine Filter schwächt die Verstärkung mit 6 Dezibel/Oktave und einer maximalen Phasendrehung von  $90^\circ$ , während das andere die Verstärkung im Frequenzbereich von 16 bis 100 Hz um einen Faktor 7 mit einer maximalen Phasendrehung von  $65^\circ$  schwächt; für Frequenzen größer als 100 Hz liefert das zweite Filter zur Phase der Kreisübertragungsfunktion  $\mu_{sp}$  keinen Beitrag.

Eine Schwierigkeit bei Gleichspannungsverstärkern besteht darin, daß bei hohen Verstärkungen eine langsame Drift der Koppelbatterie- und Netzgerätespannungen die Endstufe des Verstärkers bald übersteuern würde. Schnelle Schwankungen mit Frequenzen größer als 0,002 Hz stören nicht, weil sie bei der Schaltung des Verstärkers als Spannungsstabilisator über den „äußeren Rückkopplungsweg“ genügend gegeng gekoppelt werden. Um auch langsame Arbeitspunktschwankungen zu verhindern, wird über einen „inneren Rückkopplungsweg“ die Ausgangsspannung des Gleichspannungsverstärkers nach einer Phasendrehung von  $180^\circ$  über einen Abschwächer mit einer Vergleichsspannung verglichen und die Abweichung von der Vergleichsspannung auf den Eingang des Verstärkers zurückgekoppelt. Wie aus dem Blockdiagramm der Abb. 1 zu ersehen ist, beginnt der „innere Rückkopplungsweg“ Spannungsschwankungen, die ihren Ursprung im Spannungsverstärker haben, bei der Frequenz gegenzukoppeln, bei der die Gegenkopplung über den „äußeren Rückkopplungsweg“ aufzuhören beginnt, so daß für diese Schwankungen die Gegenkopplung von der Frequenz Null bis zu hohen Frequenzen wirksam ist. Spannungsschwankungen, die in der Endstufe oder im Generator entstehen, werden nur über den „äußeren Rückkopplungsweg“ gegeng gekoppelt.

Die Endstufe besitzt einen Stromaussteuerungsbereich von 500 mA und eine breitbandige Spannungsverstärkung von 0,2. Um die Schwankungen der Generatorspannung, die etwa 1 V betragen, wegzuregulieren, würde schon ein Stromaussteuerungsbereich von 50 mA ausreichen; es ist jedoch erforderlich, den Stromaussteuerungsbereich um ein Vielfaches überzudimensionieren, weil die Spannungsstabilisation gleichzeitig als Stabilisierungsfiler des Protonenregelkreises dient, so daß eine Übersteuerung die Instabilität des Protonenregelkreises zur Folge haben würde.



Bei einer Änderung der Vergleichsspannung des „inneren Rückkopplungskreises“ wird der Endstrom mit einer Änderungsgeschwindigkeit von etwa  $\frac{1}{100}$  min pro 10 V Vergleichsspannungsänderung und der Zeitkonstanten von etwa 2000 sec variiert. Diese Tatsache ist für den Einschaltprozeß des Protonenregelkreises wichtig, da durch eine einmalige Verstellung der Vergleichsspannung die thermische Laufgeschwindigkeit des Magnetfeldes über eine Zeit von mehreren Minuten kompensiert werden kann.

Die Auswirkung des „inneren Rückkopplungskreises“ auf die Kreisübertragungsfunktion  $\mu_{sp}$  kann dadurch beschrieben werden, daß man dem Filter  $Z_2$  die effektive Zeitkonstante

$$\tau_{eff} = \frac{RC}{\mu_2} = \frac{\tau(Z_2)}{\mu_2}$$

ordnet, wobei  $\mu_2$  die Kreisübertragungsfunktion des „inneren Rückkopplungskreises“ bedeuten soll. Die effektive Zeitkonstante beträgt 0,3 sec, so daß das Eingangsglied  $Z_1, Z_2$  die Verstärkung der tiefen Frequenzen bei 0,5 Hz abzuschneiden beginnt. Das RC-Glied  $Z_1$  hat eine Zeitkonstante von 800 sec und beginnt erst bei so tiefen Frequenzen mit der Phasenverschiebung an, daß bei  $|\mu_{sp}| = 1$  eine Gesamtphasendrehung von  $155^\circ$  vorhanden ist.

### 7. Das Einschalten des Protonenregelkreises

Zum Einjustieren des Magnetfeldes auf einen Teil der Resonanzkurve, auf dem der Felddiskriminator phasenrichtige Regelspannungen liefert, wird der Protonenregelkreis zwischen Filter 1 und Leistungsverstärker geöffnet, während gleichzeitig ein Hilfsregelkreis die Stabilisierung der Generatorspannung bis herunter zur Frequenz Null übernimmt. Der Hilfsregelkreis besitzt eine Grenzfrequenz von 0,5 Hz und schwächt bei sehr tiefen Frequenzen die Schwankungen der Generatorspannung um einen Faktor 1000. Mit Hilfe seiner variablen Vergleichsspannung kann bei abgeschalteter Spannungsstabilisierung die Grobeinstellung des Feldes auf Resonanzmitte vorgenommen werden.

Der Protonenregelkreis darf erst dann geschlossen werden, wenn die Ausgangsspannung von Filter 1 außer der richtigen Phasenlage folgende Bedingungen erfüllt:

1. Die Spannungsdifferenz gegenüber der Spannung, die den Leistungsverstärker zum Suchen der Resonanzkurve steuert, darf nicht größer als 0,1 V sein; bei einer größeren Differenz wird durch den Einschaltstoß die Spannungsstabilisierung übersteuert, was die sofortige Instabilität des Protonenregelkreises zur Folge hat.

2. Zur Zeit des Einschaltens muß die Laufgeschwindigkeit des Magnetfeldes so klein sein, daß das Feld nicht schon aus der Resonanzkurve herausgelaufen ist, bevor die Protonenregelung wirksam geworden ist.

Da die letzte Bedingung um so leichter zu erfüllen ist, je breiter die Resonanzkurve ist, wurde als Protonenresonanzprobe Wasser verwendet, dessen Linienbreite durch einen Zusatz von  $MnSO_4$  auf 1 Oe verbreitert wurde. Aus dieser Linienbreite und der Zeitkonstanten des Protonenregelkreises: von 1 sec folgt, daß die mit dem Einschalten verträgliche Lauf-

geschwindigkeit des Magnetfeldes kleiner als  $3^\circ/100$  min sein muß.

Die maximale Spannungsänderung am Felddiskriminatorausgang beim Durchlaufen der Resonanzkurve betrug 200 V. Zum Einschalten des Protonenregelkreises wird der Kondensator von Filter 1 mit einem Schalter kurzgeschlossen, so daß die Spannungsteilung von 1:100 bis herunter zur Frequenz Null wirksam wird, und die Filterausgangsspannung ohne zeitliche Verzögerung den Feldänderungen folgt. Die erste Einschaltbedingung fordert dann, daß das Feld auf  $\frac{1}{20}$  der Linienbreite genau einjustiert werden muß. Diese Feineinstellung kann nach Einschalten der Spannungsstabilisierung (Filter 2) durch eine Änderung ihrer Vergleichsspannung gut erfüllt werden. Die thermische Laufgeschwindigkeit des Magnetfeldes ist nach einer Einlaufzeit von 10 min bereits so klein, daß

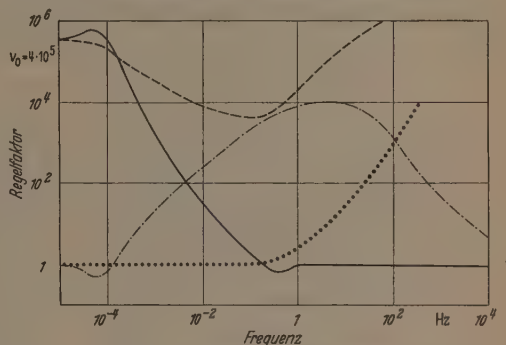


Abb. 5. Obere Grenze der Regelfaktoren. Ausgezogene Kurve: Regelfaktor für Feldänderungen, die im Magneten ihren Ursprung haben. Gestrichelte Kurve: Regelfaktor für die Spannungsschwankungen des Gleichspannungsgenerators

sie ebenfalls durch Vergleichsspannungsänderungen der Spannungsstabilisierung völlig kompensiert werden kann.

Gleichzeitig mit dem Umschalten auf die Protonenstabilisierung muß der Hilfsregelkreis abgeschaltet werden, da andernfalls der Protonenregelkreis instabil wird.

### 8. Regeleigenschaften der Gesamtregelanordnung

In den Kurven der Abb. 5 wurde die obere Grenze der mit der Regelanordnung erreichbaren Regelfaktoren in Abhängigkeit von der Frequenz dargestellt. Die ausgezogene Kurve stellt den Regelfaktor des Protonenregelkreises  $|1 + \mu_p|$  dar, der für Feldschwankungen wirksam wird, die im Magneten ihren Ursprung haben. Der Kurvenverlauf wurde auf Grund der Filtereigenschaften der Stabilisierungsfilter berechnet; die Verstärkung für die Frequenz Null,  $V_0 = 4 \cdot 10^5$  wurde experimentell bestimmt. Die größte mit der Stabilität des Protonenregelkreises verträgliche Verstärkung ergab sich zu  $V_0 = 10^6$ ; bei dieser Verstärkung begann der Protonenregelkreis mit einer Frequenz von etwa 1 Hz zu schwingen.

In der gestrichelten Kurve der Abb. 5 wurde das Verhältnis  $\Delta U_G / U_G : \Delta H / H$  der relativen Generatorspannungsschwankungen zu den bei eingeschalteter Regelanordnung noch übrigbleibenden relativen Magnetfeldschwankungen dargestellt. Diese Kurve, deren Werte mit den in Tabelle 1 geforderten Regelfaktoren



für Generatorspannungsschwankungen verglichen werden können, setzt sich multiplikativ aus drei Anteilen zusammen:

1. Aus dem Regelfaktor der Spannungsstabilisierung  $[1 + \mu_{sp}]$  (strichpunktierte Kurve); um diesen Faktor sind die Schwankungen der Spannung am Magneten kleiner als die der Generatorspannung.

2. Aus dem reziproken Wert der experimentell bestimmten Abschwächung durch den Magneten; nur ein Bruchteil der Spannungsschwankungen mit Frequenzen größer als 1 Hz werden auf das Magnetfeld übertragen (punktierte Kurve).

3. Aus dem Regelfaktor des Protonenregelkreises, der jede Feldschwankung um den Faktor  $|1 + \mu_p|$  schwächt (ausgezogene Kurve).

### 9. Experimentelle Prüfung der Feldkonstanz

Um die Magnetfeldkonstanz über lange Zeit zu prüfen, wurde eine Kernresonanzkurve registriert, und

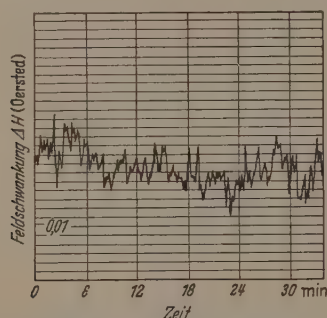


Abb. 6. Registrierkurve der Feldschwankungen.  $V_0 = 4 \cdot 10^4$ ; Flankensteilheit: 6 Skalenteile/0,01 Oe

das Magnetfeld so einjustiert, daß sich die Signalspannung der Nachweisapparatur auf einem Teil der Resonanzkurve befand, der eine möglichst große Flankensteilheit besaß. Bei konstantem Magnetfeld wurde dann die Ausgangsspannung der Nachweisapparatur registriert, so daß die Größe der Feldschwankung direkt aus dem registrierten Rauschband abgelesen werden kann, wenn das Spannungsrauschen außerhalb der Resonanzkurve klein gegenüber den registrierten Schwankungen ist, und die Flankensteilheit bekannt ist.

Als Testlinie für die Magnetfeldkonstanz erwies sich im Frequenzbereich der Nachweisapparatur die Resonanz des  $N^{14}$ -Kerns bei 3,10 MHz und einer Feldstärke von 10100 Oe als geeignet. Die Probe bestand aus einer gesättigten, wäßrigen Lösung von Ammoniumnitrat; nachgewiesen wurde die Stickstoffresonanz des  $(NH_4)^+$ -Komplexes.

Zum Eichen der Flankensteilheit wurde das Magnetfeld durch eine kleine Änderung der Transitorfrequenz um einen genau definierten Betrag verschoben, und die Spannungsänderung am Ausgang der Nachweisapparatur bestimmt. Die Transitorfrequenz kann dadurch um kleine, definierte Beträge verändert werden, indem man der quarzstabilisierten Frequenz  $\nu_0$  die Frequenz eines Oszillators zumischt, der in einem nur kleinen Bereich variabel ist. Die Flankensteilheit betrug 6 Skalenteile/0,01 Oe; Abb. 6 zeigt einen Ausschnitt aus einer Registrierkurve, in der die Feldschwankungen mit einer Zeitkonstanten von

2 sec über einen Zeitraum von 4 Std registriert wurden. Feldschwankungen mit einer Periode von etwa 1 min zeigten die größten Amplituden, die aber die  $\Delta H/H = 10^{-6}$ -Grenze nicht überschritten. Die maximale registrierte Schwankung innerhalb von 4 Std betrug, von Spitze zu Spitze gemessen, 18 Skalenteile; es konnte aber nachgewiesen werden, daß diese Schwankungen, die sich über lange Zeiten erstreckten, der Temperaturdrift des quarzstabilisierten Senders der Nachweisapparatur zugeordnet werden mußten.

Ein langsamer Resonanzdurchgang eignet sich zur Prüfung, wie gut sich das Magnetfeld zeitlich linear variieren läßt. Abb. 7 zeigt die Registrierkurve der Kernresonanz von  $Mo^{95}$  in einer gesättigten wäßrigen Lösung von Kaliummolybdat ohne paramagnetische Zusätze bei einer Resonanzfrequenz von 3,1 MHz und einer Feldstärke von 11000 Oersted. Die Änderungsgeschwindigkeit des Magnetfeldes betrug 1 Oe/Std; der gesamte Resonanzdurchgang dauert 1,5 Std. Die Breite der Resonanzkurve betrug 0,3 Oe, so daß in den Flanken der Resonanzkurve ein Abweichen vom glatten Kurvenverlauf um einen Skalenteil

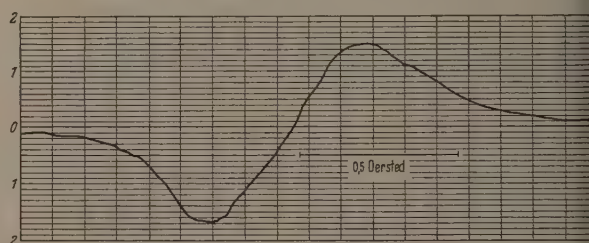


Abb. 7. Langsamer Resonanzdurchgang durch die  $Mo^{95}$ -Resonanz. Änderungsgeschwindigkeit des Feldes: 1 Oe/Std

teil mit einer Abweichung von 0,01 Oe von dem durch die Steuerung vorgegebenen Feldverlauf gleichbedeutend ist.

### Zusammenfassung

Es wird eine Regelanordnung beschrieben, mit der das Feld eines 3 kW-Elektromagneten, der für die Untersuchung von magnetischen Kernresonanzen Verwendung findet, gesteuert und stabilisiert wird.

Die Stabilisierungsanordnung besteht aus zwei Regelkreisen, von denen der eine das Magnetfeld einer magnetischen Protonenresonanz anschließt und die „tiefen Frequenzen“ der Magnetfeldschwankungen bis herauf zu 0,5 Hz wegregelt, während der andere die „hohen Frequenzen“ verhindert, indem er die Magnetspannung für Frequenzen größer als 0,002 Hz stabilisiert.

Das Magnetfeld wird über die Protonenresonanz an eine Senderfrequenz  $\nu_T$  angeschlossen und kann durch eine Veränderung dieser Frequenz gesteuert werden. Die Senderfrequenz  $\nu_T$  wird über einen dritten Regelkreis so an eine quarzstabilisierte Frequenz angeschlossen, daß sie eine Langzeitkonstanz von  $\Delta \nu_T / \nu_T = 3 \cdot 10^{-7}$  aufweist und mit einer Genauigkeit von etwa  $10^{-6}$  im Frequenzbereich von 30 bis 50 MHz verändert werden kann.

Die experimentelle Prüfung der Langzeitkonstanz des Magnetfeldes ergab, daß die Regelanordnung die relativen Feldschwankungen über eine Zeitdauer von mehreren Stunden bis auf  $\Delta H/H = 10^{-6}$  herabdrückt.



Herrn Professor Dr. H. KRÜGER möchte ich für die regung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Ratschläge herzlich danken; Herrn Professor Dr. H. KOPPELMANN, in dessen Institut die Arbeit ausgeführt wurde, bin ich für sein stets förderndes Interesse zu bestem Dank verpflichtet. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dipl.-Phys. J. KAUFMANN für seine unerlässliche Bereitwilligkeit zu klärenden Diskussionen.

**Literatur:** [1] BLOCH, F.: Phys. Rev. **70**, 460 (1946). — [2] BLOCH, F., W. W. HANSEN und M. PACKARD: Phys. Rev. **474** (1946). — [3] BLOEMBERGEN, N., E. M. PURCELL und V. POUND: Phys. Rev. **73**, 679 (1948). — [4] SOMMERS, H. S., R. WEISS und W. HALPERN: Rev. Sci. Instr. **20**, 244 (1949). — [5] SOMMERS, H. S., P. R. WEISS und W. HALPERN: Rev. Sci.

Instr. **22**, 612 (1951). — [6] PACKARD, M.: Rev. Sci. Instr. **19**, 435 (1948). — [7] THOMAS, H. A.: Electronics, N.Y. **1952**, 114. — [8] THOMAS, H. A., R. L. DRISCOLL und J. A. HIPPLE: J. Res. Nat. Bur. Stand. **44**, 569 (1950). — [9] LINDSTRÖM, G.: Ark. Fys. **4**, 1 (1950). — [10] THOMAS, H. A., R. L. DRISCOLL und J. A. HIPPLE: Phys. Rev. **78**, 787 (1950). — [11] SCHUSTER, N. A.: Rev. Sci. Instr. **22**, 254 (1951). — [12] KNÖBEL, H. W., und E. L. HAHN: Rev. Sci. Instr. **22**, 904 (1951). — [13] NYQUIST, H.: Bell. Syst. Techn. **J. 11**, 126—147 (1932). — [14] BODE, H. W.: Network Analysis and Feedback Amplifier Design. New York: Van Nostrand Company 1945. — [15] CHESTNUT, H., und R. W. MAYER: Servomechanisms and Regulating System Design, Bd. 1. New York: John Wiley & Sons 1955.

Dr. HARRO ANDRESEN,  
Physikalisches Institut der Universität Tübingen

## Zur linearen Kinetik homogener Reaktoren

VON WALTER HUMBACH

(Eingegangen am 29. April 1957)

### Einleitung

In einem homogenen Reaktor beeinflußt der Transport von brennstoffhaltiger Flüssigkeit die Reaktorkinetik. Das bekannteste Beispiel hierfür ist die Kinetik eines homogenen Reaktors mit äußerem Wärmetauscher. Beim Umpumpen werden mit der Flüssigkeit auch Träger verzögerter Neutronen aus dem Reaktor herausgeführt, die ihre Neutronen dann teilweise außerhalb des Reaktors abgeben. Die Zahl der das Zeitverhalten des Reaktors bestimmenden verzögerten Neutronen wird dadurch relativ zu der der prompten Neutronen verkleinert.

Bei der genaueren Berechnung von Vorgängen dieser Art ist zu berücksichtigen, daß die räumliche Verteilung der Quellen verzögerter Neutronen im Reaktor durch den Transport von Trägern verzögerter Neutronen mit der Flüssigkeit merklich verändert wird. In der veröffentlichten Literatur (z.B. [1] und [2]) wird nun durchwegs vorausgesetzt, daß die Flüssigkeit laminar strömt. Da diese Voraussetzung jedoch nur bei technisch wenig interessierenden Geschwindigkeiten zulässig ist, wird im folgenden als anderer Extremfall untersucht, wie durch den Transport von Trägern verzögerter Neutronen in einer turbulenten Flüssigkeit die Reaktorkinetik verändert wird. Um eine explizite Formulierung zu ermöglichen, wird vorausgesetzt, daß die Reaktivität des Reaktors zeitlich konstant bleibt.

Wir betrachten einen unreflektierten homogenen Reaktor ohne äußeren Wärmetauscher und vernachlässigen den Unterschied zwischen geometrischen und extrapolierten Dimensionen. Bei hinreichend hoher Leistung bildet sich im Reaktor eine turbulente Flüssigkeitsbewegung aus, durch welche die Dichte der Träger verzögerter Neutronen verschmiert wird. Bei hinreichend starker Turbulenz — diese wird einfachheitshalber im folgenden vorausgesetzt und kurz als vollständige Turbulenz bezeichnet — verteilen sich die Träger verzögerter Neutronen praktisch momentan und gleichmäßig über das gesamte Reaktorvolumen. Während in der üblichen Behandlungsweise im stationären Fall die Dichte von Trägern verzögerter Neutronen proportional zur Flußdichte der prompten

Neutronen angesetzt wird, wird also hier eine räumlich konstante Verteilung der Träger verzögerter Neutronen angenommen. Dies bedeutet eine Verlagerung verzögerter Neutronen in Gebiete, von denen fort sie im Mittel schneller aus dem Reaktor diffundieren können als ohne Flüssigkeitsbewegung: die effektiv wirksame Zahl verzögerter Neutronen wird dadurch verkleinert. Noch anders läßt sich dies auch folgendermaßen beschreiben: während ohne Flüssigkeitsbewegung der stationäre Zustand des Reaktors bestimmt wird, sind mit Flüssigkeitsbewegung im stationären Zustand (vor allem bei der Verteilung der Träger verzögerter Neutronen) zur Grundfunktion jetzt alle höheren Eigenfunktionen mit ihrem andersartigen Zeitverhalten zugemischt.

### Durchführung der Methode

Um die charakteristischen Perioden (Eigenperioden) bei vollständiger Turbulenz aufzufinden, gehen wir analog zur elementaren Ableitung der Grundgleichungen der Reaktorkinetik vor. Der Bremsvorgang und die Diffusionsgleichung werden formal nicht verändert. Letztere lautet in der üblichen Schreibweise

$$\left. \begin{aligned} D \Delta \Phi - \Sigma_a \Phi + \\ p \cdot q \left( (1 - \beta) \frac{k_{\infty} \Sigma_a}{p} \Phi + \sum_i \lambda_i C_i \right) - \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hier ist z.B.  $q \left( \frac{k_{\infty} \Sigma_a}{p} \Phi \right)$  die zur Quelldichte  $\frac{k_{\infty} \Sigma_a}{p} \Phi$  schneller Neutronen gehörende Bremsdichte. Falls sich die Flüssigkeit im Reaktor nicht bewegt, ist für die Konzentration von Trägern verzögerter Neutronen der  $i$ -ten Gruppe

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \lambda_i C_i = \beta_i \frac{k_{\infty} \Sigma_a}{p} \Phi \quad (2a)$$

anzusetzen. Das zweite Glied der linken Seite bedeutet die Abnahme der Konzentration durch radioaktiven Zerfall, die rechte Seite die Zunahme durch Neubildung über Kernspaltung. Im Falle der hier zu untersuchenden vollständig turbulenten Flüssigkeitsbewegung ist die rechte Seite durch einen über das



Gesamtvolumen  $V$  gemittelten Wert zu ersetzen:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \lambda_i C_i = \beta_i \sum_p \frac{k_p \Sigma_a}{V} \int \Phi dV. \quad (2b)$$

Da es zu den vorgegebenen Randbedingungen des Problems ein System orthogonaler und normierbarer Eigenfunktionen  $R_n(r)$  als Lösung der Diffusionsgleichung gibt, machen wir folgenden Ansatz:

$$\Phi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) R_n(r); \quad C_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_{in}(t) R_n(r) \quad (3)$$

mit

$$\Delta R_n(r) + B_n^2 R_n(r) = 0.$$

Für die Bremsdichte ergibt sich daher

$$\left. \begin{aligned} q \left( \sum_p k_p \Sigma_a \Phi \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e^{-B_n^2 \tau} R_n(r) \\ q(C_i) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_{in}(t) e^{-B_n^2 \tau} R_n(r), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$\tau = \text{Fermi-Alter.}$

Gl. (2b) nimmt nun die Form

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \lambda_i C_i = \beta_i \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{\int R_n(r) dV}{V} \quad (5)$$

an, oder nach Integration mit Hilfe des integrierenden Faktors

$$C_i = \beta_i \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\lambda_i t} \int a_n(t) e^{\lambda_i t} dt \frac{\int R_n(r) dV}{V} \right\}. \quad (6)$$

Um beide Gln. (1) und (6) in den  $R_n(r)$  homogen zu machen, muß zunächst die räumlich konstante rechte Seite von (6) nach den  $R_n(r)$  entwickelt werden. Hierzu stellen wir die Sprungfunktion

$$f(r) = 1, \text{ im Reaktor} \\ = 0, \text{ außerhalb des Reaktors}$$

dar als

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n R_n(r). \quad (7)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $\gamma_n$  ergeben sich mittels der Normierungsvorschrift  $\int R_n^2(r) dV = V$  zu

$$\gamma_n = \frac{\int R_n(r) dV}{V} \quad \text{mit} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 = 1, \quad (8)$$

sie folgen also aus der Geometrie der Anordnung. Nach Einsetzen von (8) in (6) erhalten wir

$$C_i = \beta_i \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{-\lambda_i t} \int a_n(t) e^{\lambda_i t} dt \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n R_n(r) \right\}. \quad (9)$$

Diese Beziehung ist in Gl. (1) einzusetzen. Verwendet man hier in bekannter Weise die Identitäten

$$D \Sigma_a = L^2, \quad 1 (v \Sigma_a) = l_0$$

und die Abkürzungen

$$k_n = k_{\infty} e^{-B_n^2 \tau} (1 - B_n^2 L^2), \quad l_n = l_0 (1 - B_n^2 L^2),$$

so nimmt Gl. (1) die folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1 + (1 - \beta) k_n) a_n(t) - l_n \dot{a}_n(t) + \right. \\ \left. + k_n \gamma_n \sum_{p=1}^{\infty} (\beta_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \int a_p(t) e^{\lambda_i t} dt \gamma_p) \right\} R_n(r) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Wegen der Orthogonalität der  $R_n(r)$  müssen hier die in den geschweiften Klammern zusammengefaßten Koeffizienten jeweils für sich verschwinden. Auf diese Weise entsteht ein unendliches System von Differentialgleichungen, das in den unbekannten Funktionen  $a_p(t)$  mit konstanten Koeffizienten linear und homogen ist. Es hat also Lösungen der Form  $a_p(t) = a_{p1} e^{\omega_1 t} + a_{p2} e^{\omega_2 t} + \dots$ , wo für jeden beliebigen Index  $p$  immer wieder dieselben reziproken Perioden  $\omega_1, \omega_2, \dots$  vorkommen. Der zur Bestimmung der  $\omega$  erlaubte Ansatz  $a_p(t) = a_p e^{\omega t}$  führt auf ein zeitfreies System linearer Gleichungen für die  $a_p$ , das ebenso viele Unbekannte wie Gleichungen enthält. Damit dieses System lösbar ist, muß die Koeffizientendeterminante verschwinden, eine Bedingung, die gleichzeitig die charakteristische Gleichung für die gesuchten Eigenperioden des Systems ist:

$$\begin{aligned} -1 + (1 - \beta) k_1 - l_1 \omega - k_1 \gamma_1^2 \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i}, \\ k_1 \gamma_1 \gamma_2 \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i}, k_1 \gamma_1 \gamma_3 \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i} \dots \\ k_2 \gamma_2 \gamma_1 \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i}, -1 + (1 - \beta) k_2 - l_2 \omega + \\ + k_2 \gamma_2^2 \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i}, k_2 \gamma_2 \gamma_3 \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i} \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Wird hier jeweils die  $n$ -te Zeile durch  $k_n \gamma_n$ , die  $n$ -te Spalte durch  $\gamma_n$  geteilt, so stehen außerhalb der Diagonale durchwegs dieselben Glieder. Nach einem Satz der Determinantenlehre [3] ist die Determinante daher linear in  $\sum_i \beta_i \lambda_i / (\omega + \lambda_i)$ . Sie läßt sich unmittelbar

bzw. über Gl. (8) in die folgenden Endformen der charakteristischen Gleichung überführen:

$$\sum_n \left\{ \frac{k_n \gamma_n^2}{1 - (1 - \beta) k_n + l_n \omega} \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i} \right\} = 1, \quad (12a)$$

$$\sum_n \gamma_n^2 \left\{ 1 - \frac{k_n}{1 - (1 - \beta) k_n + l_n \omega} \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i} \right\} = 0. \quad (12b)$$

Die physikalische Bedeutung dieser Gleichungen ergibt sich unmittelbar, wenn man ein  $\gamma_n = 1$  und alle übrigen  $\gamma_1, \gamma_2, \dots = 0$  setzt. Gl. (12) geht dann in die charakteristische Gleichung für das Zeitverhalten der  $n$ -ten Eigenfunktion des Reaktors bei Fehlen von Konvektion über. Die Durchmischung der Eigenfunktionen findet sich also in Gl. (12) als Durchmischung einzelner charakteristischer Gleichungen wieder.

Aus den Gln. (11) und (12) kann noch ein zunächst etwas überraschender Zug dieser Theorie abgeleitet werden. In der üblichen linearen Reaktorkinetik gehören zu jeder Eigenfunktion der Flußverteilung  $i + 1$  Eigenperioden. Die Zeitabhängigkeit der Amplitude einer Eigenfunktion ist also durch eine Linearkombination von  $i + 1$  Exponentialfunktionen dargestellt. Würden in einem Problem nun von den unendlich vielen Eigenfunktionen  $n$  tatsächlich verwendet, so enthielte das Problem insgesamt  $n(i + 1)$  Eigenperioden. Gl. (11) scheint auch genau diese Zahl von Eigenperioden zu enthalten. Durch das Verschmieren der Dichte der Träger verzögerter Neutronen auf eine definitionsgemäß der Form (nicht der Amplitude) nach konstante Raumverteilung werden



un aber die verschiedenen räumlichen Eigenfunktionen des Problems starr aneinander gekoppelt. Diese Starre der Kopplung engt die Freiheitsgrade des Systems und damit die Zahl der Eigenperioden an. Gl. (12) zeigt, daß statt  $n(i+1)$  tatsächlich nur  $+n$  Eigenperioden vorkommen würden.

### Verallgemeinerung der Methode

Die hier vorgeführte, von den räumlichen Eigenfunktionen ausgehende Methode läßt sich wenigstens grundsätzlich auf den allgemeinen Fall der Konvektion erweitern. An Gl. (1) ändert sich hierbei nichts. Gl. (2) sind dagegen die  $\partial C_i / \partial t$  durch materielle Differentialquotienten zu ersetzen:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + v \cdot \text{grad } C_i + \lambda_i C_i = \frac{k_{\infty} \Sigma_a}{p} \Phi. \quad (2c)$$

Man hat der Operator  $v \cdot \text{grad}$  andere Symmetrieeigenschaften als die in Gl. (1) und (2c) sonst vorkommenden Operatoren, was allein schon genügt, um die Eigenfunktionen des konvektionsfreien Problems durchzumischen. Um dies quantitativ zu formulieren, hat man mit dem Ansatz  $v \cdot \text{grad } R_n(r) = \Sigma a_{n,r} R_r$  den Gradienten ebenfalls nach Eigenfunktionen zu entwickeln, und dann das System (2c) mit (1) zu kombinieren.

Das Beispiel des ebenen, unendlichen (infinite slab), senkrecht zu seinen unendlichen Dimensionen laminar von Flüssigkeit durchströmten Reaktors mit äußerem Wärmetauscher zeigt, daß dabei zusätzliche Schwierigkeiten auftreten können. Ohne das Konvektionsglied sind die Differentialgleichungen und die Randbedingungen nämlich zur Mittelebene des Reaktors symmetrisch und es treten nur Cosinus als Eigenfunktionen auf. Der Operator  $v \partial C_i / \partial x$  dagegen ist antisymmetrisch und mischt also Sinus-Funktionen ein. Dadurch wird — wie es sein muß — das Maximum der Neutronenverteilung aus der Mittelebene des Reaktors in Richtung der Flüssigkeitsbewegung verhooben. Um jedoch zu verhindern, daß durch die Symmetrie der Randbedingungen die Amplituden der Sinus-Funktionen zu Null gemacht werden, müssen im allgemeinen Fall eines Flüssigkeitstransportes durch die Reaktoroberfläche (äußerer Wärmeaustauscher)

notwendig unsymmetrische Randbedingungen eingeführt werden.

Abschließend sei bemerkt, daß es nur bei vollständiger Turbulenz erlaubt ist, von der allgemeinen Gl. (2c) auf den speziellen Ansatz (2b) überzugehen, da bei unvollständiger Turbulenz notwendig Gradienten von  $C_i$  übrig bleiben müssen. Trotzdem sollte es möglich sein, Reaktorzustände zwischen fehlender Flüssigkeitsbewegung und vollständiger Turbulenz durch allmählichen Übergang von  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = 0$  auf den für eine vorgegebene Geometrie — bei vollständiger Turbulenz — geforderten Satz der  $\gamma_n$  anzunähern. Diesem allmählichen Übergang liegt die Vorstellung zugrunde, daß sich auch bei unvollständiger Turbulenz eine nach ihrer — relativen — räumlichen Verteilung (nicht nach ihrer Amplitude) zeitlich konstante Verteilung der Träger verzögerter Neutronen einstellen würde. Durch direkte Rechnung läßt sich zeigen, daß diese Näherungsvorstellung formal ebenfalls auf Gl. (12a) führt, wenn dort effektive  $\gamma_n$ -Werte eingesetzt werden, die zwischen den  $\gamma$ -Werten für fehlende Konvektion und vollständige Turbulenz liegen. Namentlich wegen des statistischen Charakters der Turbulenz ist es aber jedenfalls nur näherungsweise richtig, zeitliche Konstanz der relativen räumlichen Verteilung von Trägern verzögerter Neutronen vorauszusetzen.

### Zusammenfassung

Die lineare Kinetik homogener Reaktoren wird unter der Voraussetzung behandelt, daß sich die Flüssigkeit im Reaktor turbulent bewegt. Es wird gezeigt, wie sich die Eigenfunktionen des Reaktors durchmischen und wie sich die charakteristische Gleichung für die Eigenperioden mit Turbulenz aus den charakteristischen Gleichungen für die Eigenperioden ohne Turbulenz zusammensetzt. Erweiterungen der Methode werden diskutiert.

**Literatur:** [1] ERGEN, W.K., u. A.M. WEINBERG: Physika, Haag 20, 413 (1954). — [2] FLECK, I.A.: BNL 334 (T-57) April 1955. — [3] Zum Beispiel NEISS: Determinanten und Matrizen, S. 29, Aufgabe 19. Berlin 1943.

Dr. WALTER HUMMACH,  
Abt. Reaktor-Entwicklung  
der Siemens-Schuckertwerke AG., Erlangen

## Die Einflußfunktion des Reaktors mit Reflektor nach der Zweigruppen-Diffusionsmethode

VON HANS GRÜMM

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 6. April 1957)

Zur Berechnung der Druck-, Temperatur- und Konzentrationskoeffizienten von Kernreaktoren benutzt man sich zweckmäßig eines Störungsverfahrens [1]. Außer dem Neutronenfluß  $\Phi$  wird dazu die Einflußfunktion  $\Phi^+$ , d.h. die zu  $\Phi$  adjungierte Funktion benötigt [2]. Strengere Fassungen der Reaktor-Kinetik bedienen sich ebenfalls der Einflußfunktion. Die zur Reaktorgleichung adjungierte Gleichung ist verschiedentlich in allgemeiner Form [3] sowie im Hinblick auf die Mehrgruppen-Diffusionsverfahren [4] aufgestellt und diskutiert worden. Während jedoch die Lösung der Reaktorgleichung nach dem Zwei-

und Viergruppenverfahren [5], [6] ausführlich veröffentlicht wurde, scheint die Lösung der adjungierten Gleichung bisher nur für den Spezialfall des nackten Kugelreaktors nach dem Zweigruppen-Verfahren publiziert zu sein [7]. Da der Reflektor keinen geringen Einfluß auf das Verhalten eines Reaktors und seine Kinetik ausübt [8], ist es von Wichtigkeit, die Einflußfunktion gerade für den Reaktor mit Reflektor zu kennen. Im Rahmen des für Übersichtsrechnungen nützlichen Zweigruppen-Verfahrens kann diese Funktion — wie hier gezeigt werden soll — mit erträglichem Aufwand stückweise geschlossen dargestellt werden.



## 1. Die Differentialgleichungen für Fluß und Einfluß

Die Differentialgleichungen für den Neutronenfluß im kritischen Reaktor können nach dem Zweigruppen-Diffusionsverfahren in der Form

$$\begin{pmatrix} L_1 & k\Sigma_2 \\ \Sigma_1 & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

angesetzt werden. Nach der üblichen Bezeichnungsweise [5] wurde die schnelle Gruppe mit dem Index 1, die langsame mit 2 versehen. Die Operatoren  $L_1$  und  $L_2$  lauten explizit

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \nabla(D_1 \nabla) - \Sigma_1 \\ L_2 &= \nabla(D_2 \nabla) - \Sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dabei bedeutet  $\Sigma_1$  den Bremsquerschnitt und  $\Sigma_2$  den Absorptionsquerschnitt. Die Differentialgleichungen für die adjungierte Funktion lauten dann

$$\begin{pmatrix} L_1 & k\Sigma_2 \\ \Sigma_1 & L_2 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \Phi_1^+ \\ \Phi_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^+ & \Sigma_1 \\ k\Sigma_2 & L_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^+ \\ \Phi_2^+ \end{pmatrix} = 0. \quad (3)$$

Bisher wurden die Größen  $k$ ,  $D_i$  und  $\Sigma_i$  noch als ortsabhängig aufgefaßt. Nunmehr betrachten wir sie als stückweise konstant, mit der Sprungstelle an der Grenze Kern—Reflektor. Wenn wir das Reaktorinnere durch den Index  $i$ , den Reflektor durch  $r$  kennzeichnen und die Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{1i}/D_{1i} &= 1/\tau_i & \Sigma_{2i}/D_{2i} &= 1/L_{2i}^2 \\ \Sigma_{1r}/D_{1r} &= \kappa_{1r}^2 & \Sigma_{2r}/D_{2r} &= \kappa_{2r}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

einführen, können (1) und (3) in der Form

$$\left. \begin{aligned} \left( \Delta - \frac{1}{\tau_i} \quad k \frac{\Sigma_{2i}}{D_{1i}} \right) \begin{pmatrix} \Phi_{1i} \\ \Phi_{2i} \end{pmatrix} &= 0 \\ \left( \frac{\Sigma_{1i}}{D_{2i}} \quad \Delta - \frac{1}{L_{2i}^2} \right) \begin{pmatrix} \Phi_{1i} \\ \Phi_{2i} \end{pmatrix} &= 0 \\ \left( \Delta - \kappa_{1r}^2 \quad 0 \right) \begin{pmatrix} \Phi_{1r} \\ \Phi_{2r} \end{pmatrix} &= 0 \\ \left( \frac{\Sigma_{1r}}{D_{2r}} \quad \Delta - \kappa_{2r}^2 \right) \begin{pmatrix} \Phi_{1r} \\ \Phi_{2r} \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \left( \Delta - \frac{1}{\tau_i} \quad \frac{1}{\tau_i} \right) \begin{pmatrix} \Phi_{1i} \\ \Phi_{2i} \end{pmatrix} &= 0 \\ \left( \frac{k}{L_{2i}^2} \quad \Delta - \frac{1}{L_{2i}^2} \right) \begin{pmatrix} \Phi_{1i} \\ \Phi_{2i} \end{pmatrix} &= 0 \\ \left( \Delta - \kappa_{1r}^2 \quad \kappa_{1r}^2 \right) \begin{pmatrix} \Phi_{1r} \\ \Phi_{2r} \end{pmatrix} &= 0 \\ \left( 0 \quad \Delta - \kappa_{2r}^2 \right) \begin{pmatrix} \Phi_{1r} \\ \Phi_{2r} \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

geschrieben werden. Die Lösungen dieser vier Gleichungspaare müssen im Reaktor endlich, positiv und stetig sein. An der äußeren Reflektorgrenze haben sie zu verschwinden, während an der inneren Reflektorgrenze Stetigkeit und Stetigkeit des Stromes zu fordern sind.

## 2. Die Lösung des Fluß-Gleichungen

Um die formalen Beziehungen zwischen Fluß und Einfluß klarer herausstellen zu können, zitieren wir kurz die Lösung des Systems (5) nach [5]:

$$\begin{aligned} \Phi_{1i} &= A X + C Y \\ \Phi_{2i} &= S_1 A X + S_2 C Y \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Phi_{1r} &= F Z_1 \\ \Phi_{2r} &= G Z_2 + S_3 F Z_1 \end{aligned} \quad (7)$$

Dabei sind  $X$  und  $Y$  passend gewählte Lösungen der Differentialgleichungen

$$\Delta X + \mu^2 X = 0 \quad \text{und} \quad \Delta Y - \nu^2 Y = 0. \quad (8)$$

Die Größen  $B_1^2 = \mu^2$  und  $B_2^2 = -\nu^2$  sind Wurzeln der Gleichung

$$(1 + B^2 \tau_i)(1 + B^2 L_{2i}^2) = k. \quad (9)$$

$Z_1$  und  $Z_2$  stellen die am äußeren Reflektorrand verschwindenden Lösungen von

$$\Delta Z_1 - \kappa_{1r}^2 Z_1 = 0 \quad \text{und} \quad \Delta Z_2 - \kappa_{2r}^2 Z_2 = 0 \quad (10)$$

dar. Die Kopplungskonstanten  $S_i$  lauten

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{D_{1i}}{\tau_i D_{2i}} \frac{1}{\mu^2 + \frac{1}{L_{2i}^2}}; & S_2 &= \frac{D_{1i}}{\tau_i D_{2i}} \frac{1}{\frac{1}{L_{2i}^2} - \nu^2}; \\ S_3 &= \frac{\Sigma_{1r}}{D_{2r}} \frac{1}{\kappa_{2r}^2 - \kappa_{1r}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Konstanten  $A$ ,  $C$ ,  $F$  und  $G$  in (7) folgen aus der für die innere Reflektorgrenze geltenden Übergangsbedingung

$$\left. \begin{aligned} X A + Y C &= Z_1 F \\ S_1 X A + S_2 Y C &= S_3 Z_1 F + Z_2 G \\ D_{1i} X' A + D_{1i} Y' C &= D_{1r} Z_1' F \\ D_{2i} S_1 X' A + D_{2i} S_2 Y' C &= D_{2r} S_3 Z_1' F + D_{2r} Z_2' G \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Das Verschwinden der Determinante des Systems (12) stellt die kritische Gleichung zur Bestimmung der inneren Reflektorgrenze dar. Nach Vorgabe von  $A$  folgen dann die anderen Konstanten aus (12)

$$\left. \begin{aligned} C &= -A \frac{X' Z_1 - \lambda_1 Z_1' X}{Y' Z_1 - \lambda_1 Z_1' Y}; \\ F &= A \frac{X Y' - X' Y}{Y' Z_1 - \lambda_1 Z_1' Y} \quad \text{mit} \quad \lambda_1 = \frac{D_{1r}}{D_{1i}}; \\ G &= \frac{A}{Z_2(Y' Z_1 - \lambda_1 Z_1' Y)} [S_1 X(Y' Z_1 - \lambda_1 Z_1' Y) - \\ &\quad - S_2 Y(X' Z_1 - \lambda_1 Z_1' X) - \\ &\quad - S_3 Z_1(X Y' - X' Y)]. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Hier sind  $X$ ,  $Y$ ,  $Z_i$  und ihre Ableitungen für die Reflektorgrenze zu nehmen.

## 3. Die Lösung der Einfluß-Gleichung

Bei der Lösung des ersten Systems (6) geht man genau so wie bei der Bestimmung des Flusses vor. Da die homogenen Teile beider Gleichungen von gleichem Typus sind, ist es naheliegend, den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi_{1i} &= -B^2 \Phi_{1i} \\ \Delta \Phi_{2i} &= -B^2 \Phi_{2i} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

zu versuchen. Einsetzen von (14) in das erste System (6) führt wieder zu der Bedingung (9). Daraus folgt daß  $\Phi_i^+$  ebenfalls durch die Lösungen  $X$  und  $Y$  von (8) dargestellt werden kann

$$\begin{aligned} \Phi_{1i}^+ &= \bar{A} X + \bar{C} Y \\ \Phi_{2i}^+ &= T_1 \bar{A} X + T_2 \bar{C} Y. \end{aligned} \quad (15)$$



durch Einsetzen von (15) in (6) ergeben sich die Koppelkoeffizienten

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 1 + \tau_i \mu^2 = \varepsilon S_1; & T_2 &= 1 - \tau_i \nu^2 = \varepsilon S_2 \\ \varepsilon &= k \Sigma_{2i} / \Sigma_{1i}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wenden wir uns nun dem zweiten System in (6). Der „langsame“ Einfluß gehorcht der Gleichung

$$\Delta \Phi_{2r}^+ - \kappa_{2r}^2 \Phi_{2r}^+ = 0. \quad (17)$$

Vergleichen wir mit (10) zeigt, wird sie durch

$$\Phi_{2r}^+ = \bar{F} Z_2 \quad (18)$$

löst. Die Gleichung für den „schnellen“ Einfluß

$$\Delta \Phi_{1r}^+ - \kappa_{1r}^2 \Phi_{1r}^+ + \kappa_{2r}^2 \Phi_{1r}^+ = 0 \quad (19)$$

lösen wir durch den Ansatz

$$\Phi_{1r}^+ = \bar{G} Z_1 + T_3 \bar{F} Z_2 \quad (20)$$

zu lösen. Wir finden durch Einsetzen die Koppelkonstante

$$T_3 = \frac{\kappa_{1r}^2}{\kappa_{1r}^2 - \kappa_{2r}^2} = - \frac{D_{2r}}{D_{1r}} S_3. \quad (21)$$

Aus den Übergangsbedingungen an der inneren Reflektorgrenze

$$\left. \begin{aligned} X \bar{A} + Y \bar{C} &= T_3 Z_2 \bar{F} + Z_1 \bar{G} \\ T_1 X \bar{A} + T_2 Y \bar{C} &= Z_2 \bar{F} \\ D_{1i} X' \bar{A} + D_{1i} Y' \bar{C} &= D_{1r} T_3 Z_2 \bar{F} + D_{1r} Z_1 \bar{G} \\ D_{2i} T_1 X' \bar{A} + D_{2i} T_2 Y' \bar{C} &= D_{2r} Z_2 \bar{F} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

folgen nach Vorgabe von  $\bar{A}$  die Konstanten

$$\left. \begin{aligned} \bar{C} &= -\bar{A} \frac{T_1(X'Z_2 - \lambda_2 X'Z_2')}{T_2(Y'Z_2 - \lambda_2 Y'Z_2')} \\ \bar{F} &= \bar{A} T_1 \frac{X Y' - X' Y}{Z_2 Y' - \lambda_2 Z_2' Y} \quad \text{mit} \quad \lambda_2 = \frac{D_{2r}}{D_{2i}} \\ \bar{G} &= \frac{\bar{A}}{Z_1(Z_2 Y' - \lambda_2 Z_2' Y)} \left[ X(Z_2 Y' - \lambda_2 Z_2' Y) - \frac{T_1}{T_2} Y(Z_2 X' - \lambda_2 Z_2' X) - T_1 T_3 Z_2 (X Y' - X' Y) \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Dabei sind  $X, Y, Z_i$  und ihre Ableitungen an der inneren Reflektorgrenze zu nehmen. Zur Kontrolle muß geprüft werden, ob die Determinante des Systems (23) für die gleiche Reflektorgrenze verschwindet, wie die des Systems (12). Dieser Nachweis läßt sich mit einiger Rechenarbeit führen.

Der Vergleich des Neutronenflusses (7) mit dem entsprechenden Einfluß (15), (18) und (20) zeigt charakteristische Symmetrien. Im Reaktorinnern sind Einfluß und Einfluß aus den gleichen Funktionen aufgebaut und unterscheiden sich voneinander nur durch die Konstanten. Im Reflektor dagegen sind die Ausdrücke für die schnellen und langsamen Komponenten gewissermaßen vertauscht. Physikalisch ist dieser Sachverhalt klar: der schnelle Fluß hat im Reflektor seine Quellen, während der langsame einen zusätzlichen, von der Bremsung herrührenden Quellterm

aufweist. Beim Einfluß ist das Umgekehrte der Fall. Hier liegt die Neutronenquelle im Aufpunkt<sup>1</sup> und daher zählen die durch Bremsung entstehenden langsamen Neutronen zum Einfluß der schnellen Gruppe.

#### 4. Ein numerisches Beispiel

Die Einflußfunktion wurde nach (15), (18) und (20) im Anschluß an die Arbeiten der Stuttgarter Reaktorgruppe über homogene Leichtwasserreaktoren [9] für

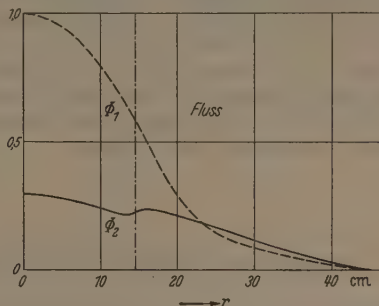


Abb. 1. Schneller und thermischer Fluß in einem kugelförmigen Leichtwasserreaktor vom LOPO-Typus. Die Grenze Kern-Reflektor ist strichpunktliert eingetragen

den LOPO (low power reactor) bestimmt. Das Ergebnis ist, gemeinsam mit dem entsprechenden Einfluß in Abb. 1 und 2 dargestellt. Auffällig ist das Überwiegen des thermischen Einflusses im Reaktorinnern

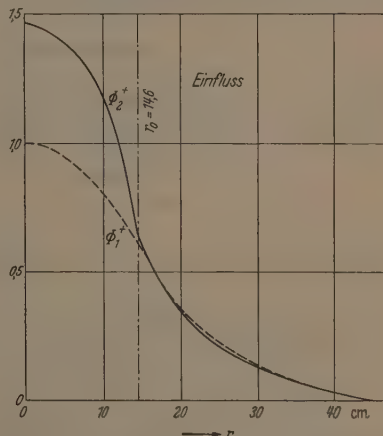


Abb. 2. Die Einflußfunktionen für schnelle und thermische Neutronen für denselben Reaktor

und der ähnliche Verlauf von schnellem und thermischem Einfluß im Reflektor. Auch diese Erscheinung ist physikalisch verständlich: ein thermisches Neutron hat im Innern eine größere Chance zu spalten, als ein schnelles, das während des Bremsvorganges eingefangen werden oder in den Reflektor gelangen und dort verloren gehen kann. Im Reflektor dagegen wird ein schnelles Neutron bald abgebremst sein und beim

<sup>1</sup> Die Einflußfunktion ist der asymptotischen Spaltwahrscheinlichkeit (iterated fission probability) proportional. Diese kann definiert werden als das Neutronen-Niveau, das sich in einem ursprünglich leeren, kritischen Reaktor nach unendlich langer Zeit einstellt, wenn an einem bestimmten Ort ein Neutron bestimmter Energie und Richtung eingesetzt wurde, das den Reaktor „zündet“. Siehe GRÜMM, H., u. K. H. HÖCKER: Z. angew. Phys. 9, 305 (1957).

Eintritt in das Reaktorinnere keinen wesentlich anderen Beitrag zur Spaltungskette liefern, als ein langsames Neutron aus dem Reflektor.

### Zusammenfassung

Bei der Berechnung des kritischen Verhaltens von Reaktoren ist die Störungstheorie unter Benützung der Einflußfunktion von großem Nutzen. In der allgemein zugänglichen Literatur ist die Formulierung der Gleichungen für den Einfluß bei Reaktoren mit Reflektor bisher nicht zu finden. Der 1. Abschnitt der Arbeit bringt diese Gleichungen, der 2. und 3. gibt deren Lösung bei Verwendung von zwei Neutronengruppen. Zum Schluß wird als Beispiel der thermische und schnelle Einfluß bei einem kleinen Wasserkocher numerisch ausgerechnet und diskutiert.

Herrn Prof. Dr. HÖCKER danke ich für die Anregung zur Beschäftigung mit diesem Problemkreis

**Literatur:** [1] Reactor Handbook A. E. C., Kap. I. 1955. — [2] Vgl. z. B. GLASSTONE-EDLUND: The Elements of Nuclear Reactor Theory, Kap. XIII. New York: Van Nostrand 1956. Ferner GRÜMM, H., u. K. H. HÖCKER: Z. angew. Phys. 9, 305 (1957). — [3] WIGNER, E. P.: Unpubl. Vgl. z. B. L. N. USSACHOFF, Genfer Ber. Bd. V, P/656. — [4] WEINBERG, A.: Amer. J. Phys. 20, 401 (1952). — [5] GLASSTONE-EDLUND [2], Kap. VIII. — [6] EMENDÖRFER, D., K. H. HÖCKER u. M. RITZI: Naturforsch. 11, 731 (1956). — [7] Reactor Handbook, Kap. I.6. — [8] RUMSEY, V. H.: J. Appl. Phys. 25, 1395 (1954). — [9] EMENDÖRFER, D., F. WAGNER, J. CLAUTS u. M. RITZI: Atomkernenergie, H. 11/12, S. 377. 1956.

Dr. HANS GRÜMM,  
Abteilung Reaktorphysik  
im Institut für Theoretische und Angewandte Physik  
der Technischen Hochschule Stuttgart

## Impulsgenerator mit Lichtsteuerung für die HF-Ionenquelle eines 1,5 MeV-Kaskadengenerators

Von WOLF-HEINER DIO

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 10. April 1957)

Kurze Neutronenimpulse, z. B. für Laufzeitspektrometrie oder Untersuchungen an instationären Neutronenfeldern, können entweder durch mechanische Unterbrechung (chopper) eines Neutronenstrahles oder

steuert. Sie befindet sich zusammen mit dem Impuls-generator für die Extraktionsspannung in der Abschirmhaube der Hochspannungselektrode des Beschleunigungsrohres. Das Synchronisierungs-Signal

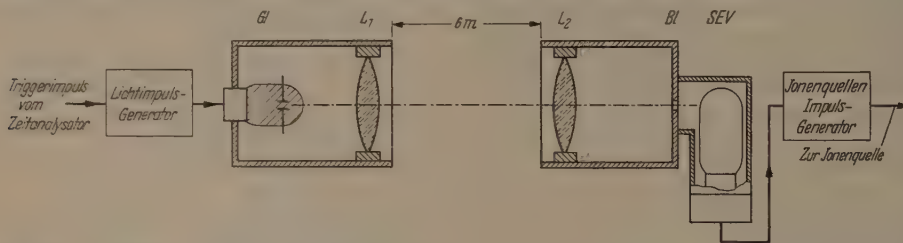


Abb. 1. Schematische Darstellung der Apparatur.  $G_1$  Glühlampe ESM60,  $L_1$  Linse 80 mm  $\varnothing$   $f=150$  mm,  $L_2$  Linse 80 mm  $\varnothing$   $f=120$  mm,  $B_1$  Bleid 2 mm  $\varnothing$ , SEV Sekundärelektronen-Vervielfacher (RCA 931A)

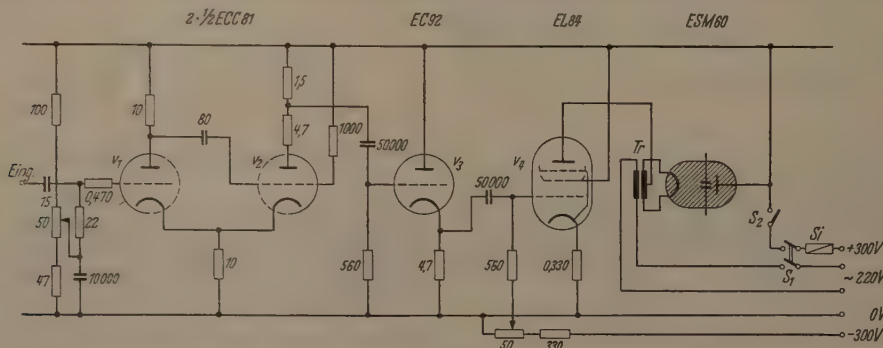


Abb. 2. Schaltung des Lichtimpuls-Generators. Alle Widerstandswerte in k $\Omega$ ; alle Kapazitätswerte in pF

durch elektrische Ablenkung des Ionenstrahles eines Teilchenbeschleunigers, bzw. durch Pulsung seiner Ionenquelle erzeugt werden.

Im vorliegenden Falle wird eine HF-Ionenquelle in Verbindung mit einem Kaskadengenerator offener Bauart als gepulste Neutronenquelle verwendet. Die HF-Ionenquelle wird von einem Zeitanalysator ge-

steuert. Sie befindet sich zusammen mit dem Impuls-generator für die Extraktionsspannung in der Abschirmhaube der Hochspannungselektrode des Beschleunigungsrohres. Das Synchronisierungs-Signal





Impulsfolgefrequenzen ( $\sim 2000$  Hz) wurde das Verhältnis Signal zu Störpegel bei den von der Glimmlampe erzeugten Lichtimpulsen kleiner. Dieses Verhältnis konnte jedoch durch Erhöhung der Vorspannung am Gitter von  $V_4$  (Abb. 2) auf  $-19$  V wieder auf den oben angegebenen Wert gebracht werden.

### Zusammenfassung

Es werden ein Gerät für die Erzeugung kurzer Ionenimpulse aus einer HF-Ionenquelle, sowie eine Vorrichtung für die Steuerung dieser Erzeugung durch

einen Zeitanalysator beschrieben und genaue Schaltungen angegeben.

Die Arbeit wurde durch Mittel des Schwerpunktsprogramms unterstützt. Herrn Ing. SEIDEL danke ich für die Mitwirkung beim Bau der Geräte.

**Literatur:** [1] v. DARDEL, G., E. HELSTRAND u. C. TAYLOR: Appl. sci. Res., Haag B 3, 35 (1953). — [2] GATTI, E. G. PERONA e A. PERSANO: Nuovo Cim. 10, 80 (1953).

Dipl.-Phys. WOLF-HEINER DIO,  
Hochspannungslaboratorium Hechingen (Hohenzollern)  
und Institut für Kernphysik  
der Universität Frankfurt a. M.

## Elementarer Beweis eines erweiterten Reaktanztheorems für Zweipole\*

VON HANS WOLTER

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 30. März 1957)

### 1. Einleitung

Verlustlose Vierpole, Sechspole usw. haben frequenzabhängige Daten, die sich alle auf die Kurzschluß- und Leerlaufwiderstände zurückführen lassen, d.h. auf Zweipolwiderstände von Reaktanzen. Umfassendere Sätze über die Vierpole usw. folgen daher aus dem Reaktanztheorem, das von FOSTER [1] zuerst bewiesen wurde, nachdem Teilaussagen kurz zuvor von ZOBEL [2] gewonnen waren. BAERWALD [3] gab einen einfachen Beweis, in dem er die mathematischen Komplikationen des Fosterschen vermied. Doch erreichte BAERWALD dies durch Einführung physikalischer Axiome zusätzlich zu den Maxwell'schen Gleichungen. Diese Axiome wären zwar beweisbar, sind aber nicht evident; z.B. verbietet das eine für die Unterfunktionen von Reaktanzen Pole von höherer als 1. Ordnung mit der Argumentation, daß anderenfalls Oberfunktionen wie  $t^{n-1} \cdot e^{i\omega_k t}$  mit  $n > 1$  auftreten und eine Anfachung bedeuten würden. Dieses Argument ist wenig überzeugend, da man gerade umgekehrt bei der Festlegung des Integrationsweges bei dem Übergang von der Fourier-Transformation zu der Laplace-Transformation zu argumentieren pflegt. Man weist dort mit Recht darauf hin, daß „verlustlose schwingungsfähige Gebilde“ nur als Grenzfälle aus verlustbehafteten erzeugt gedacht werden dürfen, wenn man mit der Erfahrung im Einklang bleiben will. Alle Pole  $\omega_k$  sind hiernach bei der Fourier-Transformation ein wenig oberhalb der reellen Achse zu denken. Der Integrationsweg — ursprünglich auf der reellen Achse verlaufend — hat die Pole auch dann rechts zu unterfahren, wenn man um der einfacheren Formulierung willen die Verluste vernachlässigt und die  $\omega_k$  in die reelle Achse selbst rücken läßt. Sieht man analog in BAERWALD'S Funktionen  $t^{n-1} \cdot e^{i\omega_k t}$  die Pole  $\omega_k$  als beliebig wenig über der reellen Achse liegend an, so gibt es keine Anfachung, da  $e^{i\omega_k t}$  dann dem Betrage nach stärker fällt als irgendeine Potenz  $t^{n-1}$  der Zeit steigen könnte.

Zu einem von solchen Argumentationen und Axiomen ganz freien Beweis, der dennoch prinzipiell sehr einfach ist, kommt man durch ein induktives Beweis-

verfahren, das in den nächsten Abschnitten beschrieben ist. Es erlaubt vor allem nicht nur den Beweis des Fosterschen Theorems sondern fast ebenso einfach (Abschn. 8ff.) den Beweis eines erweiterten Reaktanztheorems; dieses bezieht sich auf verlustlose Zweipole, die als Bauelemente auch Leitungen umfassen, für die FOSTER'S Theorem nicht mehr gilt.

### 2. Formulierung und Interpretation des Fosterschen Reaktanztheorems

Wir sprechen das Fostersche Reaktanztheorem in folgendem Satze aus:

**Satz 1.** Ist  $\Re$  der Widerstand eines Netzwerkzweipols aus verlustlosen Spulen und Kondensatoren, so ist  $\Re/\omega$  eine „fostersche“ Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$ .

Mit  $i$  ist die imaginäre Einheit bezeichnet. Das Wort „fostersche“ ist für Funktionen erklärt durch die

**Definition 1.** Eine Funktion  $f(\omega)$  heißt „fostersche“, wenn gilt:

- ①  $f(\omega)$  rational.
- ②  $f(-\omega) = -f(\omega)$  für jedes  $\omega$ , an dem  $f(\omega)$  regulär.
- ③  $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} f(\omega) = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \omega$ .<sup>1</sup>
- ④ In jedem Stetigkeitsintervall der reellen Achse ist die Ableitung  $f'(\omega) > 0$ .
- ⑤ Alle Pole und Nullstellen liegen auf der reellen Achse; sie sind von 1. Ordnung.
- ⑥ Hat  $f(\omega)$  mehr als einen Pol, so nimmt  $f(\omega)$  zwischen je zwei benachbarten Polen jeden reellen Wert auf der reellen Achse genau einmal an.
- ⑦ Hat  $f(\omega)$  mehr als eine Nullstelle, so liegt zwischen je zwei benachbarten Nullstellen auf der reellen Achse genau ein Pol.
- ⑧ Der Nullpunkt ist entweder Pol oder Nullstelle.
- ⑨ Der Punkt  $\infty$  ist entweder Nullstelle oder Pol.
- ⑩ Die Anzahl der Pole ist gleich der Anzahl der Nullstellen, wenn der Punkt  $\infty$  mitgezählt wird.

<sup>1</sup> Es bedeutet

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \text{ bei reellem } x.$$

\* Vorgetragen auf der Tagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, September 1956.



Auch für verlustlose Zweipole soll die Bezeichnung „fostersch“ gebraucht werden nach der

**Definition 2.** Einen verlustlosen Zweipol nennen wir „fostersch“, wenn er einen Widerstand  $\Re$  hat, so daß

$$\Re/i$$

eine fostersche Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$  ist.

Der Satz 1 hat dann auch die Form: *Netzwerkzweipole aus verlustlosen Spulen und Kondensatoren sind fostersch.*

Im Zusammenhang mit der Definition 1 sagt der Satz 1 also unter anderem, daß  $\Re/i = f(\omega)$  für reelle  $\omega$  selbst reell, also der Widerstand eines verlustlosen Zweipols rein imaginär ist. Das steckt in der Eigenschaft ③ der Definition 1; denn für reelles  $\omega$  ist  $\operatorname{Im} \omega = 0$ ; also nach ③ auch  $\operatorname{Im} f(\omega) = 0$ .

Da der Beweis induktiv geführt wird, ist es nützlich, nicht zu wenig zu behaupten; denn bei induktiven Beweisen ist die Behauptung für alle Funktionen der Menge zugleich Voraussetzung für die Elemente. Das ist vor allem der Grund für die über FOSTERS Formulierung hinausgehende Aussage ③. Die Eigenschaft ④ wurde schon von ZOBEL induktiv bewiesen.

Nach den Eigenschaften ⑧ und ⑨ lassen sich alle „fosterschen“ Funktionen  $f(\omega)$  in 4 Klassen einteilen, je nachdem der Nullpunkt und der Punkt  $\infty$  jeweils Pol oder Nullstelle sind. Wir können jede Klasse durch ein Buchstabenpaar bezeichnen.  $P$  bedeutet Pol,  $N$  Nullstelle; der erste Platz gilt dem Nullpunkt, der zweite dem Punkt  $\infty$ . So bezeichnet  $NP$  die Klasse, deren Funktionen am Nullpunkt eine Nullstelle, am Punkt  $\infty$  einen Pol haben; hierzu gehört die Funktion  $L\omega$  mit  $L > 0$  (also das  $\Re/i$  einer verlustlosen Spule).  $PN$  bezeichnet die Klasse, deren Funktionen einen Pol am Nullpunkt und eine Nullstelle am Punkt  $\infty$  haben, z.B.  $\frac{-1}{C\omega}$  mit  $C > 0$  (also das  $\Re/i$  eines verlustlosen Kondensators). Die Klasse  $NN$  hat am Nullpunkt und am Punkt  $\infty$  je eine Nullstelle; dazu gehört z.B.

die Funktion  $\frac{\omega L}{1 - LC\omega^2}$  mit  $L > 0$ ;  $C > 0$  (also im Beispiel das  $\Re/i$  eines Parallelkreises nach Abb. 1c). Der vierten Klasse ( $PP$ ) mit Polen am Nullpunkt und am Punkt  $\infty$  gehört z.B. das  $\Re/i$  des Längskreises nach Abb. 1d an; denn hier ist

$$\frac{\Re}{i} = \frac{\omega^2 L C - 1}{\omega C} \quad \text{mit } L > 0; C > 0.$$

Die Abb. 1 gibt rechts kompliziertere Beispiele für jede Klasse; diese sind für das Verhalten der „fosterschen“ Funktionen in jeder Klasse charakteristischer als die extrem einfachen Beispiele links. In jedem der Beispiele rechts wurde die Anzahl der Pole gleich 4 oder 5 gewählt; sie ist gleich der Anzahl der Nullstellen nach Definition 1, Eigenschaft ⑩. „Gleichnamige“ Klassen ( $NN$  und  $PP$ ) haben gerade Anzahl, „ungleichnamige“ Klassen ( $NP$  und  $PN$ ) haben ungerade Anzahl der Nullstellen, wenn der Punkt  $\infty$  mitgezählt wird.

### 3. Zurückführung der Eigenschaften ⑥ bis ⑩ auf die Eigenschaften ① bis ⑤ der Definition 1

Die Eigenschaften ⑥ bis ⑩ sind nicht unabhängig von den vorhergehenden. Es sei hier zunächst bewiesen, daß sie aus den Eigenschaften ① bis ⑤ folgen.

**Zu ⑥.** Die Pole und Nullstellen meromorpher<sup>1</sup> (also erst recht rationaler) Funktionen sind isoliert.  $\omega_1$  und  $\omega_2$  seien benachbarte Pole; im Intervall  $(\omega_1; \omega_2)$  der reellen Achse ist  $f(\omega)$  regulär und reell mit  $f'(\omega) > 0$ .

Es ist  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_1+0} f(\omega) = -\infty$  und  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_2-0} f(\omega) = +\infty$ , da einerseits der  $\lim = \pm \infty$  sein muß, das andere Vorzeichen aber gegen  $f'(\omega) > 0$  verstoßen würde. Zu jedem  $A > 0$  gibt es also ein  $\varepsilon_1 > 0$  und ein  $\varepsilon_2 > 0$  so, daß

$$f(\omega_1 + \varepsilon_1) \leq -A; \quad f(\omega_2 - \varepsilon_2) \geq +A.$$

Nach dem Satz der Analysis, daß jede stetige eigentlich monotone Funktion ( $f'(\omega) > 0$ ) jeden Zwischenwert genau einmal annimmt, folgt ⑥.

**Zu ⑦.**  $\omega_1$  und  $\omega_2$  seien zwei benachbarte Nullstellen. Läge zwischen ihnen kein Pol, so wäre die

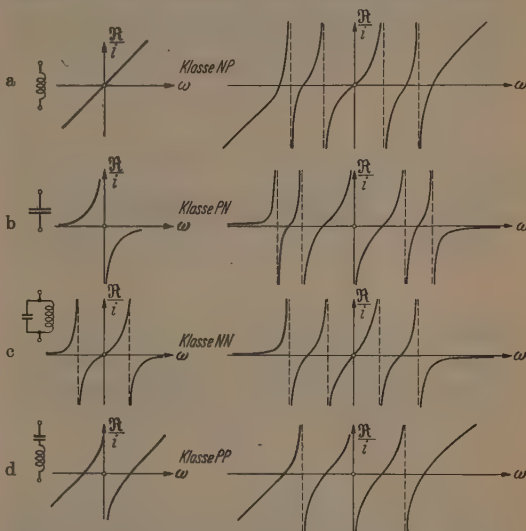


Abb. 1 a—d. Beispiele für fostersche Funktionen der 4 Klassen; links je das einfachste Beispiel der Klasse, rechts je ein charakteristisches Beispiel mit 5 (bei NP und PN) bzw. 4 (bei NN und PP) Polen; der Punkt  $\infty$  ist bei NP und PP als Pol mitgezählt

nach ① meromorphe Funktion  $f(\omega)$  regulär im Intervall  $(\omega_1; \omega_2)$ . Wegen  $f'(\omega_1) > 0$  und  $f'(\omega_2) > 0$  gäbe es ein  $\varepsilon > 0$ , so daß  $f(\omega_1 + \varepsilon) > 0$  und  $f(\omega_2 - \varepsilon) < 0$ . Nach dem Zwischenwertsatz müßte dann zwischen  $\omega_1 + \varepsilon$  und  $\omega_2 - \varepsilon$  noch eine weitere Nullstelle liegen. Da dies gegen die Voraussetzung,  $\omega_1$  und  $\omega_2$  seien benachbarte Nullstellen, verstößt, ist die Annahme, zwischen ihnen läge kein Pol, falsch.

Daß nur ein einziger Pol vorliegt, folgt aus ⑥. Wären mehrere vorhanden, so nach ⑥ auch mindestens eine weitere Nullstelle entgegen der Voraussetzung, daß  $\omega_1$  und  $\omega_2$  benachbarte Nullstellen sind.

**Zu ⑧.** Nach ② ist  $f(0) = -f(\infty)$ ; d.h.  $f(0) = 0$ , wenn der Nullpunkt Stetigkeitsstelle ist. Wenn nicht, so kann er nach ① nur Pol sein.

**Zu ⑨.** Wenn der Punkt  $\infty$  Regularitätspunkt ist, so ist nach ②  $f(-\infty) = -f(\infty)$ ; d.h.  $f(\infty) = 0$ .

**Zu ⑩.** Nach ⑨ liegt zwischen je zwei Nachbarn genau eine Nullstelle auf der reellen Achse. Ist der Punkt  $\infty$  Pol

<sup>1</sup> In dieser Ziffer wird bei den Beweisen zu ⑥ bis ⑨ nur die Meromorphie der Funktion  $f(\omega)$  benutzt; deshalb bleiben die hier gegebenen Beweise auch für die später zu behandelnden neufosterschen Funktionen gültig.

und existieren außerdem  $N$  Pole im Endlichen, so gibt es also  $N+1$  Nullstellen; das ist aber auch die Anzahl der Pole, da der Punkt  $\infty$  als ein einziger Pol gilt.

Ist der Punkt  $\infty$  Nullstelle, so gilt alles, was soeben gesagt wurde; nur ist ⑥ durch ⑦ zu ersetzen und die Begriffe Pol und Nullstelle sind gegeneinander auszutauschen.

#### 4. Die Menge der fosterschen Funktionen und einfache Hilfssätze zum Beweis des Fosterschen Satzes

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Menge der nach Definition 1 eingeführten fosterschen Funktionen. Diese Menge ist nicht leer; denn es gilt der

**Hilfssatz 1.** Die Funktion  $\omega$  ist eine fostersche Funktion von  $\omega$ .

$\omega$  hat am Nullpunkt eine Nullstelle, am Punkt  $\infty$  einen Pol, je erster Ordnung. Alle Aussagen der Def. 1 sind hier trivialerweise erfüllt.

Operationen, durch die man aus einer oder mehreren fosterschen Funktionen neue fostersche Funktionen erzeugen kann, geben die Hilfssätze 2 bis 4 an.

**Hilfssatz 2.** Ist  $f(\omega)$  fostersch, so ist auch

$$K \cdot f(\omega)$$

mit einer beliebigen reellen Konstanten  $K > 0$  fostersch.

Die Multiplikation mit einer positiven Konstanten ändert an keiner der Eigenschaften ① bis ⑥ der Definition 1 etwas.

**Hilfssatz 3.** Ist  $f(\omega)$  fostersch, so ist auch

$$-\frac{1}{f(\omega)}$$

fostersch.

**Beweis.** Die Eigenschaften ① und ③ der Definition 1 bleiben bei Übergang zum Negativreziproken erhalten. Auch ③ bleibt gültig; denn es ist<sup>1</sup>

$$\operatorname{Im} \left( -\frac{1}{f(\omega)} \right) = \operatorname{Im} \left( -\frac{f^*(\omega)}{|f(\omega)|^2} \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{f(\omega)}{|f(\omega)|^2} \right);$$

also

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \left( -\frac{1}{f(\omega)} \right) = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} f(\omega) = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \omega$$

nach Voraussetzung über  $f(\omega)$  selbst.

Die Eigenschaft ④ bleibt erhalten, da auf der reellen Achse

$$\frac{d}{d\omega} \left( -\frac{1}{f(\omega)} \right) = \frac{f'(\omega)}{(f(\omega))^2} > 0$$

nach Voraussetzung für  $f(\omega)$  selbst.

Die Eigenschaft ⑤ bleibt erhalten, da bei Übergang zum Negativreziproken Pole und Nullstellen nur ihre Rolle tauschen; sie behalten erste Ordnung.

**Hilfssatz 4.** Gehören  $f_1(\omega)$  und  $f_2(\omega)$  zur Menge der fosterschen Funktionen, so gehört auch

$$f_1(\omega) + f_2(\omega)$$

zu ihr.

**Beweis.** Die Eigenschaften ① und ② bleiben trivialerweise erhalten.

③ bleibt erhalten, weil nach Voraussetzung z.B. für  $\operatorname{Im} \omega > 0$  auch  $\operatorname{Im} f_1(\omega) > 0$  und  $\operatorname{Im} f_2(\omega) > 0$  sind, also

$$\operatorname{Im} (f_1(\omega) + f_2(\omega)) = \operatorname{Im} f_1(\omega) + \operatorname{Im} f_2(\omega) > 0$$

ist, also  $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} (f_1(\omega) + f_2(\omega)) = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \omega$  ist.

<sup>1</sup>  $f^*(\omega)$  sei konjugiert komplex zu  $f(\omega)$ .

Für  $\operatorname{Im} \omega < 0$  ist nach Voraussetzung  $\operatorname{Im} f_1(\omega) < 0$ ,  $\operatorname{Im} f_2(\omega) < 0$  und

$$\operatorname{Im} (f_1(\omega) + f_2(\omega)) = \operatorname{Im} f_1(\omega) + \operatorname{Im} f_2(\omega) < 0,$$

also wieder gleichen Vorzeichens wie  $\operatorname{Im} \omega$  selbst.

Für  $\operatorname{Im} \omega = 0$ , also reelles  $\omega$ , sind  $f_1(\omega)$  und  $f_2(\omega)$  reell, also auch die Summe beider.

④ bleibt erhalten, da

$$\frac{d}{d\omega} (f_1(\omega) + f_2(\omega)) = f'_1(\omega) + f'_2(\omega) > 0.$$

Der Beweis von ⑤ ist nicht trivial und macht bezüglich der Nullstellen wesentlich Gebrauch davon, daß die Eigenschaft ③ schon bewiesen ist. Pole hat die Summe zwar nur dort, wo mindestens eine der Ausgangsfunktionen einen Pol hat — also nur auf der reellen Achse; Pole bleiben auch von 1. Ordnung, da die Laurent-Entwicklungen um den Pol  $\omega_p$

$$f_1(\omega) = \frac{a_1}{\omega - \omega_p} + \dots; \quad f_2(\omega) = \frac{a_2}{\omega - \omega_p} + \dots,$$

auch dann für  $f_1(\omega) + f_2(\omega)$  zu einem Pol erster Ordnung führen, wenn beide Funktionen am gleichen Punkt  $\omega_p$  je einen Pol haben. Wegen der Monotonie-eigenschaft ④ sind die Residuen  $a_1$  und  $a_2$  von gleichem (negativem) Vorzeichen; die Pole können sich daher auch nicht gegenseitig auslöschen.

Die Nullstellen dagegen bleiben nicht notwendig erhalten. Doch können neue Nullstellen nur auf der reellen Achse bei Addition beider Funktionen entstehen. Denn für jeden Punkt  $\omega_0$  mit  $\operatorname{Im} \omega_0 \neq 0$  ist nach ③

$$\operatorname{Im} \{f_1(\omega_0) + f_2(\omega_0)\} \neq 0; \quad \text{also} \quad f_1(\omega_0) + f_2(\omega_0) \neq 0.$$

Zur Durchführung des Beweises war es also wichtig, eine Eigenschaft ③, die über die Reellität hinausgeht, in die Definition 1 und damit in die Behauptung des Fosterschen Satzes aufzunehmen. Behauptet man zu wenig, so hat man im Beweisverfahren zu schwache Voraussetzungen für die Ausgangsfunktionen  $f_1(\omega)$  und  $f_2(\omega)$ .

Mit den Operationen nach den Hilfssätzen 2 bis 4 kann man beliebig viele fostersche Funktionen aus der fosterschen Funktion  $\omega$  erzeugen. Daß auch alle fosterschen Funktionen so aus  $\omega$  gewonnen werden können, wird aus der Darstellbarkeit (Teil 7 auf S. 344 ff.) hervorgehen.

#### 5. Beweis des Satzes 1

Aus den Maxwellschen Gleichungen folgt in bekannter Weise, daß

$$\frac{\Re}{i} = L \cdot \omega \quad (1)$$

für eine verlustlose Spule der Induktivität  $L$  und

$$\frac{\Re}{i} = \frac{1}{C} \cdot \left( -\frac{1}{\omega} \right) \quad (2)$$

für einen verlustlosen Kondensator der Kapazität  $C$  ist. Daher gilt der

**Satz 1a.** Jede verlustlose Spule und jeder verlustlose Kondensator sind fostersch.

**Beweis.** Für jede Spule gilt das, weil  $\omega$  nach Hilfssatz 1 fostersch ist und die Multiplikation mit der positiven Konstanten  $L$  nichts daran ändert; für den Kondensator gilt das



aus denselben Gründen und ferner wegen des Hilfssatzes 3, nach dem der Übergang zum Negativreziproken eine „zulässige“ Operation ist.

Aus den Kirchhoffschen Regeln, d. h. letzten Endes aus den Maxwellschen Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung folgen ferner die Sätze:

**Satz 1b.** Die Hintereinanderschaltung fosterscher Zweipole gibt wieder einen fosterschen Zweipol.

*Beweis.* Sind  $\Re_1$  und  $\Re_2$  die Widerstände der Ausgangszweipole, so sind  $\Re_1/i$  und  $\Re_2/i$  nach Voraussetzung fostersche Funktionen; dann gilt für den Widerstand  $\Re_h$  der Hintereinanderschaltung

$$\frac{\Re_h}{i} = \frac{\Re_1}{i} + \frac{\Re_2}{i}, \quad (3)$$

und das ist nach Hilfssatz 4 wieder eine fostersche Funktion.

**Satz 1c.** Die Parallelschaltung fosterscher Zweipole gibt wieder einen fosterschen Zweipol.

*Beweis.* Für den Widerstand  $\Re_p$  der Parallelschaltung ist

$$\frac{\Re_p}{i} = \frac{1}{i} \left( \frac{1}{\frac{1}{\Re_1} + \frac{1}{\Re_2}} \right) = \frac{-1}{-\frac{i}{\Re_1} - \frac{i}{\Re_2}}. \quad (4)$$

Da nach Voraussetzung  $\Re_1/i$  und  $\Re_2/i$  fostersch sind, sind nach Hilfssatz 3 auch die Negativreziproken hiervon fostersch, dann auch deren Summe nach Hilfssatz 4, und dann auch das Negativreziproke dieser Summe nach Hilfssatz 3.

Die Beweise der Sätze 1a, 1b und 1c sind zusammen der Beweis des Satzes 1, da jedes aus verlustlosen Spulen und Kondensatoren aufgebaute Netzwerk in endlich vielen Schritten aus den Elementen durch Hintereinander- oder Parallelschalten gewonnen werden kann.

## 6. Erweiterung des Satzes 1 auf Einbeziehung verlustloser Transformatoren

Aus den Maxwellschen Gleichungen folgt in bekannter Weise, daß ein verlustloser Transformator von der Primärinduktivität  $L_1$ , der Sekundärinduktivität  $L_2$  und der Streuung  $\sigma$  einen Widerstand  $\Re$  transformiert in einen Widerstand  $\Re'$  nach

$$\frac{\Re'}{i} = \frac{L_1 \frac{\Re}{i} + L_1 L_2 \sigma \omega}{\frac{\Re}{i \omega} + L_2} \quad (5)$$

d. h.

$$\frac{\Re'}{i} = L_1 \sigma \omega - L_1 \frac{1 - \sigma}{-\frac{1}{\omega} - L_2 \frac{i}{\Re}}. \quad (6)$$

Darin sind  $L_1$  und  $L_2$  positive Konstanten und  $0 \leq \sigma \leq 1$ . Die Form (6) läßt die Anwendbarkeit der Hilfssätze erkennen, und wir behaupten deshalb den

**Satz 2.** Jeder Zweipol aus endlich vielen Spulen, Kondensatoren und verlustlosen Transformatoren ist fostersch.

*Beweis.* Es ist über die Sätze 1a, 1b, 1c hinaus nur noch zu zeigen, daß die verlustlose Transformation eine „zulässige“ Operation ist, d. h. einen fosterschen Zweipol in einen fosterschen Zweipol transformiert. Das folgt aus Gl. (6).

Wir unterscheiden drei Fälle:

a)  $\sigma = 0$ ; dann besagt Gl. (6)

$$\frac{\Re'}{i} = -L_1 - \frac{1}{-\frac{1}{\omega} - L_2 \frac{i}{\Re}}. \quad (7)$$

Da  $\Re/i$  nach Voraussetzung fostersch ist, ist auch das Negativreziproke nach Hilfssatz 3 fostersch und dann nach Hilfssatz 2 auch  $L_2 \left( -\frac{i}{\Re} \right)$ . Da  $-\frac{1}{\omega}$  fostersch ist, ist es auch der Nenner der rechten Seite in Gl. (7) und dann auch sein Negativreziprokes. Die Multiplikation mit  $L_1 > 0$  ändert nichts mehr daran.

b)  $0 < \sigma < 1$ ; da dann  $1 - \sigma > 0$ , so ist der zweite Summand in Gl. (6) fostersch genau wie unter a. Der erste Summand ist fostersch nach den Hilfssätzen 1 und 2. Die Summe ist fostersch nach Hilfssatz 4.

c)  $\sigma = 1$ ; dann ist nach Gl. (6)  $\Re'/i = L_1 \omega$  und fostersch, als ob die Primärspule allein vorläge.

## 7. Andere Formulierungen des Reaktanztheorems und Vollständigkeitsbeweis für die Erzeugung der Fosterschen Menge

Der Widerstand und sein Reziprokes, der Leitwert, sind von Natur aus nicht voneinander ausgezeichnet. Es gilt der

**Satz 3.** Mit  $\Re/i$  ist auch  $\mathfrak{G}/i$  eine fostersche Funktion, wenn  $\mathfrak{G} = 1/\Re$  definiert ist. In der Klassenbezeichnung der fosterschen Funktionen ist bei Übergang von  $\Re$  zu  $\mathfrak{G}$  (oder umgekehrt) jedes  $N$  durch  $P$  und jedes  $P$  durch  $N$  zu ersetzen.

*Beweis.*

$$\frac{\mathfrak{G}}{i} = \frac{1}{\Re i} = -\frac{i}{\Re}$$

ist nach Hilfssatz 3 fostersch als Negativreziprokes der nach Voraussetzung fosterschen Funktion  $\Re/i$ . Bei Übergang von  $\Re/i$  zu  $\mathfrak{G}/i$  oder umgekehrt wandeln Pole sich in Nullstellen und Nullstellen in Pole. Daher wird Klasse  $NN$  mit  $PP$  und  $NP$  mit  $PN$  getauscht.

Oft wird das Fostersche Reaktanztheorem unmittelbar in Form der Polynomquotientendarstellung ausgesprochen. Diese folgt aus unserer Formulierung; denn als rationale Funktion läßt sich jede fostersche Funktion als Quotient zweier Polynome darstellen; deren nach dem Fundamentalsatz der Algebra stets existierende Linearfaktorenzerlegungen setzen Pole und Nullstellen in Evidenz. Da alle Pole und Nullstellen reell sind, enthalten die Linearfaktoren nur reelle Konstanten. Die fosterschen Funktionen sind ferner antimetrisch; daher müssen — abgesehen vom Nullpunkt und vom Punkte  $\infty$  — alle Pole und Nullstellen als Paare  $\omega_k$ ,  $-\omega_k$  vorliegen. Faßt man zugehörige Paare von Linearfaktoren zusammen, so hat jede fostersche Funktion eine Darstellung

$$f(\omega) = A(\omega) \frac{(\omega^2 - \omega_1'^2)(\omega^2 - \omega_2'^2) \cdots (\omega^2 - \omega_n'^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \cdots (\omega^2 - \omega_n^2)}, \quad (9)$$

in der  $A(\omega)$  entweder  $K \cdot \omega$  oder  $K/\omega$  sein kann — je nachdem, ob der Nullpunkt Nullstelle oder Pol ist. Da er in jeder Form erster Ordnung sein muß, tritt  $\omega$  nur in 1. Potenz in  $A(\omega)$  im Zähler oder Nenner auf. Aus dem gleichen Grunde sind alle  $\omega_k$  und  $\omega_k'$  in der Darstellung verschieden.

Die Anzahlen  $n$  und  $n'$  sind nicht beliebig frei voneinander, da der Punkt  $\infty$  nur Pol oder Nullstelle je 1. Ordnung sein kann.

Die gesamte Ordnung im Zähler der Gl. (9) muß also um 1 kleiner oder größer als im Nenner sein. So

ergeben sich für die 4 Klassen die 4 Darstellungen

$$f_{NN}(\omega) = K\omega \frac{(\omega^2 - \omega_1'^2)(\omega^2 - \omega_2'^2) \cdots (\omega^2 - \omega_n'^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \cdots (\omega^2 - \omega_n^2)}, \quad (10)$$

$$f_{NP}(\omega) = K\omega \frac{(\omega^2 - \omega_1'^2)(\omega^2 - \omega_2'^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{n-1}'^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \cdots (\omega^2 - \omega_n^2)}, \quad (11)$$

$$f_{PP}(\omega) = \frac{K}{\omega} \frac{(\omega^2 - \omega_1'^2)(\omega^2 - \omega_2'^2) \cdots (\omega^2 - \omega_n'^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \cdots (\omega^2 - \omega_n^2)}, \quad (12)$$

$$f_{PN}(\omega) = \frac{K}{\omega} \frac{(\omega^2 - \omega_1'^2)(\omega^2 - \omega_2'^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{n+1}'^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \cdots (\omega^2 - \omega_n^2)}. \quad (13)$$

Bei den Klassen  $NP$  und  $PP$  ist die Ordnung im Nenner größer als im Zähler; deshalb kann  $f(\omega)$  nach einem Satz der elementaren Algebra als Partialbruchsumme dargestellt werden:

$$f(\omega) = \sum_{k=-n}^n \frac{b_k}{\omega_k - \omega} \quad \text{für Klassen } NP \text{ und } PP. \quad (14)$$

Wegen der Antimetrie ist  $\omega_{-k} = -\omega_k$ ,  $\omega_0 = 0$  und wegen  $f'(\omega) > 0$  sind alle  $b_k > 0$  für  $k \neq 0$  und  $b_0 \geq 0$ .

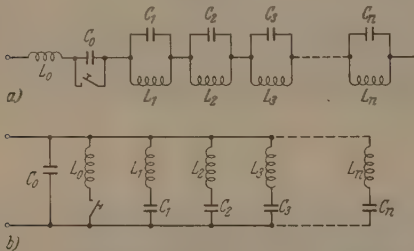


Abb. 2a u. b. Partialbruchschaltungen, die für alle Frequenzen gleichen Widerstand wie der vorgegebene Zweipol haben. a Widerstandspartialbruchschaltung, b Leitwertpartialbruchschaltung

In den Klassen  $NN$  und  $PN$  hat der Zähler um 1 höhere Ordnung als der Nenner, und man kann „durchdividieren“, d.h. ein Polynom  $a\omega + d$  abspalten. Der verbleibende Restquotient hat im Nenner höhere Ordnung als im Zähler und kann in Partialbrüche zerlegt werden. Die Konstante  $d$  muß wegen der Antimetrie verschwinden; deshalb folgt für alle Klassen die Darstellung

$$f(\omega) = a\omega + \sum_{k=-n}^n \frac{b_k}{\omega_k - \omega} \quad (15)$$

mit  $a \geq 0$ ; d.h. nach paarweiser Zusammenfassung

$$f(\omega) = a\omega - \frac{b_0}{\omega} + \sum_{k=1}^n \frac{2b_k \omega}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (16)$$

mit  $a \geq 0$ ;  $b_k \geq 0$ ;  $\omega_k > 0$ . Nicht alle Konstanten  $b_k$ ,  $a$  seien Null.

Identifizieren wir  $f(\omega)$  mit  $\Re/i$  eines fosterschen Zweipols, so zeigt Gl. (16), daß der Zweipol gleiche Frequenzabhängigkeit seines Widerstandes hat wie eine „Widerstandspartialbruchschaltung“ nach Abb. 2a.

Der  $k$ -te Einzelkreis hat ein

$$\Re_i = \frac{1}{C_k} \cdot \frac{\omega}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (17)$$

mit  $\omega_k^2 = 1/L_k C_k$ . Führt man die  $C_k$  und  $L_k$  statt der  $b_k$  und  $\omega_k$  ein, so wird aus (16) die Partialbruchdar-

stellung

$$\Re_i = \omega L_0 + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \text{oder} \\ -\frac{1}{C_0 \omega} \end{array} \right\} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \frac{\omega}{\frac{1}{C_k L_k} - \omega^2}. \quad (18)$$

Der in Abb. 2a parallel zum Kondensator ( $C_0$ ) gelegte Schalter ist geöffnet bei den Klassen  $PN$  und  $PP$ , bei denen der Nullpunkt Pol ist; er ist geschlossen bei den Klassen  $NN$  und  $NP$ , bei denen das Glied  $\frac{1}{C_0 \omega}$  in der Darstellung (18) zu streichen ist.

Identifiziert man  $f(\omega)$  mit  $\Im/i$  eines fosterschen Zweipols, so erhält man aus (16) die „Leitwertpartialbruchschaltung“ der Abb. 2b als vollwertige Ersatzschaltung des Zweipols. Der  $k$ -te Einzelkreis hat ein

$$\frac{\Im}{i} = \frac{1}{L_k} \cdot \frac{\omega}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad \text{mit} \quad \omega_k^2 = \frac{1}{L_k C_k}, \quad (19)$$

und die Partialbruchschaltung hat ein

$$\frac{\Im}{i} = C_0 \omega + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \text{oder} \\ -\frac{1}{L_0 \omega} \end{array} \right\} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \frac{\omega}{\frac{1}{L_k C_k} - \omega^2}. \quad (20)$$

Jeder fostersche Zweipol hat also sowohl eine Widerstandspartialbruchschaltung nach Abb. 2a als auch eine Leitwertpartialbruchschaltung nach Abb. 2b als einander äquivalente vollwertige (d.h. für alle Frequenzen gleichbleibende) Ersatzschaltung.

Wir benutzen hier die Darstellung (16) vor allem zum Beweis für den

**Satz 4.** Jede fostersche Funktion läßt sich aus der Funktion  $f(\omega) \equiv \omega$  mit den Operationen nach Hilfssatz 2, 3 und 4 in endlich vielen Schritten erzeugen.

**Beweis.** Der  $k$ -te Summand in (16) ist für  $b_k > 0$

$$2b_k \cdot \frac{\omega}{\omega_k^2 - \omega^2} = \frac{-1}{\omega - \frac{\omega_k^2}{\omega}} \cdot 2b_k$$

nach den Hilfssätzen erzeugbar. Ist ein  $b_k = 0$ , so tritt der Summand nicht auf. Die schrittweise Summation folgt dem Hilfssatz 4.

## 8. Verlustlose Leitungsstücke als nichtfostersche Reaktanzen

Die Tragweite des klassischen Fosterschen Reaktanztheorems wird eingeschränkt durch die Tatsache, daß kein Netzwerk ohne Leitungsstücke realisiert werden kann; jedes noch so kleine endliche Leitungstück ist ein nichtfostersches Schaltelement. Wie aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt, transformiert ein verlustloses Stück Leitung den Widerstand  $\Re$  in einen Widerstand  $\Re'$  nach

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{\Re'}{i} = \frac{\frac{1}{Z} \frac{\Re}{i} + \tan(a\omega)}{1 - \frac{\Re}{i} \frac{1}{Z} \tan(a\omega)}. \quad (21)$$

$Z > 0$  ist der reelle Wellenwiderstand,  $a > 0$  ist ein Maß der Leitungslänge.  $\tan(a\omega)$  ist eine transzendente Funktion von  $\omega$  mit unendlich vielen Polen und Nullstellen und Stellen beliebig vorgegebenen Wertes in jeder Umgebung des Punktes  $\infty$ ; der Punkt  $\infty$  ist eine wesentlich singuläre Stelle der Tangensfunktion und auch der Funktion (21), wenn  $\Re/i$



zunächst einmal als fostersch vorausgesetzt wird; denn die Funktion (21) hat abzählbar viele Pole für

$$\tan(a\omega_k) = \frac{iZ}{\Re(\omega_k)}; \quad k = 1; 2; 3; \dots \quad (22)$$

und zwar außerhalb jeder unteren Schranke für  $\omega$  und mindestens einen.  $\Re/i$  ist also nichtfostersch, wenn  $\Re/i$  fostersch ist.

Aber auch einfach ein kurzgeschlossenes Leitungstück mit  $\Re = 0$  hat in

$$\frac{\Re'}{i} = Z \cdot \tan(a\omega) \quad (23)$$

eine transzendente, also nichtfostersche Frequenzabhängigkeit; ebenso ein offenes Leitungstück mit  $\Re = \infty$ , da dann

$$\frac{\Re'}{i} = -Z \cdot \cot(a\omega) \quad (24)$$

st. Trotzdem haben die Funktionen (23) und (24) viele Eigenschaften fosterscher Funktionen, insbesondere die eigentliche Monotonie [es ist sogar wieder  $\Re'(\omega) > 0$  für jedes Stetigkeitsintervall der reellen Achse]. Pole und Nullstellen sind bei beiden Funktionen von 1. Ordnung; sie sind isoliert voneinander, der Nullpunkt ist entweder Pol oder Nullstelle. Aber alles, was sich auf den Punkt  $\infty$  bezog in der Definition 1 von S. 340, hat hier keine Gültigkeit mehr. Ähnlich liegen die Dinge bei allen Netzwerkzweipolen, die Leitungen enthalten. Deshalb kann man ein erweitertes Reaktanztheorem aus dem Fosterschen gewinnen, wenn man die Aussagen über den Punkt  $\infty$  fortläßt, also auch statt „rational“ in Definition 1 „meromorph“ setzt.

### 9. Erweitertes Reaktanztheorem unter Einfluß von verlustlosen Spulen, Kondensatoren, Transformatoren und Leitungen

**Satz 5.** Für einen Reaktanzzweipol mit endlich vielen verlustlosen Spulen, Kondensatoren, Transformatoren und Leitungen ist  $\Re/i$  eine neufostersche Funktion der Kreisfrequenz.

**Definition 3.** Eine Funktion  $f(\omega)$  heißt neufostersch, wenn sie die in Definition 1 genannten Eigenschaften hat. Doch ist in (1) „meromorph“ statt „rational“ zu setzen. (10) fällt fort. In (9) ist statt „Pol“ zu schreiben: „Pol oder wesentliche Singularität“.

Die Eigenschaften (6) bis (9) folgen aus den Eigenschaften (1) bis (5). Der Beweis ist in Ziffer 3 gegeben. Dort wurde deshalb bereits ausdrücklich nur die Meromorphie benutzt, nicht die Rationalität. Der kursiv gedruckte Teil zu (10) ist natürlich für neufostersche Funktionen gegenstandslos.

**Definition 4.** Ein Reaktanzzweipol heißt „neufostersch“, wenn sein Widerstand  $\Re$  die Bedingung erfüllt, daß  $\Re/i$  eine neufostersche Funktion ist.

Der Satz 5 hat dann auch die Form: Jeder Reaktanzzweipol aus endlich vielen verlustlosen Spulen, Kondensatoren, Transformatoren und Leitungen ist neufostersch.

### 10. Hilfssätze

**Hilfssatz 1'.** Die Funktion  $\omega$  ist neufostersch.

**Beweis.**  $\omega$  ist sogar fostersch, also erst recht neufostersch, da die Definition 3 aus Definition 1 durch Verringerung der Aussagen hervorging.

**Hilfssatz 1'a.** Für jedes  $a > 0$  ist die Funktion  $\tan(a\omega)$  neufostersch.

**Beweis.** Die Erfüllung aller Bedingungen der Definition 3 außer (3) ist bekannt. Hier nachzuweisen bleibt lediglich noch die Eigenschaft (3). Es ist für reelles  $a > 0$  und  $\omega = u + iv$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \tan(a\omega) &= \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \left\{ -i \frac{e^{2iau(u+iv)} - 1}{e^{2iau(u+iv)} + 1} \right\} \\ &= -\operatorname{sgn} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{2iau} - e^{2av}}{e^{2iau} + e^{2av}} \right\} \\ &= -\operatorname{sgn} \operatorname{Re} \left\{ (e^{2av} + e^{-2iau}) (e^{2iau} - e^{2av}) \right\} \\ &= -\operatorname{sgn} \operatorname{Re} \left\{ 1 + e^{2av} (e^{2iau} - e^{-2iau}) - e^{4av} \right\} \\ &= \operatorname{sgn} \operatorname{Re} \{ e^{4av} - 1 \} \\ &= \begin{cases} > 0 & \text{für } v > 0 \\ = 0 & \text{für } v = 0 \\ < 0 & \text{für } v < 0, \text{ w. z. b. w.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Hilfssatz 2'.** Ist  $f(\omega)$  neufostersch, so ist auch  $K \cdot f(\omega)$  mit einer beliebigen reellen Konstanten  $K > 0$  „neufostersch“.

**Hilfssatz 3'.** Ist  $f(\omega)$  neufostersch, so ist auch

$$-\frac{1}{f(\omega)}$$

neufostersch.

**Hilfssatz 4'.** Gehören  $f_1(\omega)$  und  $f_2(\omega)$  zur Menge der neufosterschen Funktionen, so gehört auch

$$f_1(\omega) + f_2(\omega)$$

zu ihr.

Die Beweise der Hilfssätze 2' bis 4' gleichen wörtlich denen der Beweise 2 bis 4. Die Formulierungen wurden dort bereits entsprechend gewählt.

### 11. Beweis des erweiterten Reaktanztheorems

Da sowohl die Ausgangsfunktion  $\omega$  als auch die Operationen zur Erzeugung weiterer neufosterscher Funktionen wie bei fosterschen zur Verfügung stehen, bedarf es zum Beweis des erweiterten Reaktanztheorems nur noch einer Betrachtung der Leitungen. Diese transformieren einen Widerstand  $\Re$  in einen Widerstand  $\Re'$  nach Gl. (21), die wir umformen in

$$Zi = \frac{\Re}{-iZ + \tan(a\omega)} - \frac{1}{iZ - \cot(a\omega)} \quad (25)$$

Zunächst ist  $\tan(a\omega)$  nach Hilfssatz 1'a neufostersch. Dann ist das Negativreziproke  $-\cot(a\omega)$  nach Hilfssatz 3' ebenfalls neufostersch. Ist  $\Re/i$  neufostersch, so auch  $\frac{\Re}{iZ}$  und  $-\frac{iZ}{\Re}$ , also auch die Nenner in (25) rechts nach Hilfssatz 4'. Das Negativreziproke der Nenner ist dann nach Hilfssatz 3' neufostersch und ihre Summe nach Hilfssatz 4' ebenfalls.

### 12. Über Darstellbarkeit neufosterscher Funktionen

Jede meromorphe Funktion hat nach MITTAG-LEFFLER eine Partialbruchdarstellung, die ihre Hauptteile in Evidenz setzt. Insbesondere bilden ihre Pole eine abzählbare Menge  $\omega_k$  mit  $k = \pm 1; \pm 2; \dots$ , der unter Umständen noch der Nullpunkt hinzuzuzählen ist. Bei neufosterschen Funktionen treten wegen der Antimetrie und der 1. Ordnung aller Pole nur Hauptteile 1. Ordnung auf und diese abgesehen vom

Nullpunkt paarweise in der Form

$$\frac{b_k}{\omega_k - \omega}; \quad -\frac{b_k}{\omega_k + \omega}.$$

Deshalb hat jede neufostersche Funktion eine Partialbruchdarstellung

$$f(\omega) = g_0(\omega) - \frac{b_0}{\omega} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{2b_k \omega}{\omega_k^2 - \omega^2} - g_k(\omega) \right) \quad (26)$$

mit  $b_k \geq 0$ . Darin sind die  $g_k(\omega)$  Polynome; sie sind zur Konvergenzerzeugung unter Umständen unentbehrlich.

Natürlich existiert eine Ersatzschaltung aus endlich vielen Kreisen bei nur neufosterschen Zweipolen nicht immer.

Auch die Frage, ob sich alle neufosterschen Funktionen aus  $\omega$  und  $\tan(a\omega)$  mit beliebigen  $a > 0$  erzeugen lassen und ob alle neufosterschen Zweipole Ersatzschaltungen mit endlich vielen Spulen, Kondensatoren, Transformatoren und Leitungen haben, ist zu verneinen. Hiermit zusammenhängende Fragen werden in der nächsten Ziffer behandelt.

### 13. Erweiterungsmöglichkeiten

Die Einzelbetrachtungen im Zusammenhang mit den neufosterschen Funktionen zeichnen die Funktion  $\tan(a\omega)$  unter allen neufosterschen Funktionen nur deshalb aus, weil wir uns bei den Einzelheiten auf das Beispiel „enger“ homogener Leitungen beschränkt haben.

Bei Hohlrohrleitungen z. B. treten Funktionen wie

$$\frac{R_n}{i} = f_n(\omega) = \omega \frac{\tan(b\sqrt{\omega^2 - n^2\omega_1^2})}{\sqrt{\omega^2 - n^2\omega_1^2}} \quad (27)$$

mit  $\omega_1 > 0$ ;  $b > 0$  und  $n = 1; 2; 3 \dots$  auf. Auch diese Funktionen sind neufosterschen nach Definition 3.

**Beweis.** Zu (1): Die Meromorphie könnte gestört sein nur am Verzweigungspunkt der Wurzel, also an den beiden Punkten  $\omega = \pm \omega_1 \cdot n$ . „In der Umgebung“ eines jeden dieser Punkte aber ist beliebig gut

$$f_n(\omega) \approx \omega \cdot \frac{b\sqrt{\omega^2 - n^2\omega_1^2}}{\sqrt{\omega^2 - n^2\omega_1^2}} = \omega \cdot b. \quad (28)$$

Zu (2):  $f_n(\omega)$  ist antimetrisch.

Zu (3): Wir bezeichnen

$$\omega = \alpha + i\beta; \quad b \cdot \sqrt{\omega^2 - \omega_1^2 n^2} = u + iv.$$

Das Zeichen  $\sim$  heiße „vorzeichengleich“; dann ist

$$\operatorname{Im} f_n(\omega) \sim \operatorname{Im} \left\{ (\alpha + i\beta) \frac{\tan(u + iv)}{u + iv} \right\}. \quad (29)$$

Nun ist

$$\tan(u + iv) = \frac{\sin 2u + i \sin 2v}{2(\cos^2 u \cosh^2 v + \sin^2 u \sinh^2 v)}, \quad (30)$$

also

$$\operatorname{Im} f_n(\omega) \sim \operatorname{Im} \{ (\alpha + i\beta)(u - iv)(\sin 2u + i \sin 2v) \}$$

$$\sim \operatorname{Im} \{ (\alpha + i\beta) [(u \sin 2u + v \sin 2v) + i(u \sin 2v - v \sin 2u)] \}$$

$$\operatorname{Im} f_n(\omega) \sim \beta(u \sin 2u + v \sin 2v) + \alpha(u \sin 2v - v \sin 2u). \quad (31)$$

Dabei ist nach Definition von  $u$  und  $v$ ,  $\alpha$  und  $\beta$

$$(\alpha + i\beta)^2 - \omega_1^2 n^2 = \frac{(u + iv)^2}{b^2};$$

d. h.

$$\alpha^2 - \beta^2 - \omega_1^2 n^2 = \frac{1}{b^2} (u^2 - v^2), \quad (32)$$

$$\alpha \cdot \beta = u \cdot v \cdot \frac{1}{b^2}. \quad (33)$$

Wir unterscheiden mehrere Fälle:

1.  $\beta \neq 0$ ; dann ist

$$\operatorname{Im} f_n(\omega) \sim \beta \{ (u \sin 2u + v \sin 2v) + \frac{1}{b^2 \beta^2} (u^2 v \sin 2v - v^2 u \sin 2u) \}. \quad (34)$$

1a.  $\beta \neq 0$ ;  $\alpha \neq 0$ ; dann ist nach Gl. (33)  $u \cdot v \neq 0$

und

$$u \cdot \sin 2u > 0; \quad v \cdot \sin 2v > 0, \quad (35)$$

$$u^2 v \sin 2v - v^2 u \sin 2u > u^2 v \sin 2v - v^2 u \sin 2u = 0, \quad (36)$$

also

$$\operatorname{Im} f_n(\omega) \sim \beta = \operatorname{Im} \omega, \quad \text{w. z. b. w.}$$

1b.  $\beta \neq 0$ ;  $\alpha = 0$ ; dann ist nach Gl. (31)

$$\operatorname{Im} f_n(\omega) \sim \beta(u \sin 2u + v \sin 2v). \quad (37)$$

Zwar ist jetzt nach Gl. (33)  $u \cdot v = 0$ , aber entweder  $u \neq 0$  oder  $v \neq 0$ , da sonst nach Gl. (32) sein müßte

$$-\beta^2 - \omega_1^2 n^2 = 0.$$

Daher ist in Gl. (37) der Faktor bei  $\beta$  größer 0, w. z. b. w.

2.  $\beta = 0$ ; d. h.  $\omega$  reell; dann ist nach Gl. (31)

$$\operatorname{Im} f_n(\omega) \sim \alpha(u \sin 2v - v \sin 2u). \quad (38)$$

Nun ist aber nach Gl. (33) auch  $u \cdot v = 0$ ; also verschwindet sowohl  $u \cdot \sin 2v$  als auch  $v \cdot \sin 2u$ . Es ist also  $\operatorname{Im} f_n(\omega) = 0$ , w. z. b. w.

Zu (4).

**Fall 1.** Wenn  $\sqrt{\omega^2 - n^2\omega_1^2}$  reell, dann wählen wir  $\sqrt{\omega^2 - n^2\omega_1^2} > 0$ . Für die Ableitung  $f'_n(\omega)$  gilt auf der reellen Achse, wenn wir  $\sqrt{\omega^2 - n^2\omega_1^2}$  mit  $\sqrt{\quad}$  abkürzen

$$f'_n(\omega) \sim \sqrt{\quad} \left\{ \tan(b\sqrt{\quad}) + \omega \frac{b}{\cos^2(b\sqrt{\quad})} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\quad}} \right\} - \omega \tan(b\sqrt{\quad}) \frac{\omega}{\sqrt{\quad}}$$

$$\sim \sqrt{\quad}^2 \cdot \frac{1}{2} \sin(2b\sqrt{\quad}) + \omega^2 b \sqrt{\quad} - \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2b\sqrt{\quad})$$

$$f'_n(\omega) \sim \omega^2 b \sqrt{\quad} - \frac{1}{2} \sin(2b\sqrt{\quad}) \{ \omega^2 - \sqrt{\omega^2 - n^2\omega_1^2} \}.$$

Das zweite Glied ist kleiner als  $\frac{1}{2} \cdot 2b\sqrt{\quad} \cdot \omega^2$ , also kleiner als das 1. Glied; d. h.  $f'_n(\omega) > 0$ , w. z. b. w.

**Fall 2.**  $\omega^2 - n^2\omega_1^2 < 0$ ; dann setzen wir

$$\sqrt{\omega^2 - n^2\omega_1^2} = i \sqrt{n^2\omega_1^2 - \omega^2} = iV \quad \text{mit } V > 0 \quad \text{und haben}$$

$$f_n(\omega) = \omega \frac{\mathfrak{Tan}(bV)}{V};$$

daraus folgt

$$f'_n(\omega) \sim V \left\{ \mathfrak{Tan}(bV) - \frac{\omega b}{\mathfrak{C}0^2(bV)} \frac{\omega}{V} \right\} + \omega \mathfrak{Tan}(bV) \cdot \frac{\omega}{V}$$

$$\sim \frac{V^2}{2} \mathfrak{Cin}(2bV) - \omega^2 bV + \frac{\omega^2}{2} \mathfrak{Cin}(2bV)$$

$$\sim \frac{1}{2} \mathfrak{Cin}(2bV) \{ \omega^2 + \sqrt{n^2\omega_1^2 - \omega^2} \} - \omega^2 bV.$$



Der erste Summand ist positiv und größer als  $2bV \cdot \omega^2$ , also größer als der zweite; also ist  $f'_n(\omega) > 0$ , w. z. b. w.

Fall 3. Wenn  $\omega^2 - n^2 \cdot \omega_1^2 \rightarrow 0$  geht, so geht

$$f_n(\omega) \rightarrow b\omega.$$

Dort ist also  $f'_n(\omega) = b > 0$ , w. z. b. w.

#### 14. Ausblick

Aus Beispielen wie dem in Ziffer 13 behandelten möchte man vermuten, daß die Erweiterung von den Fosterschen zu den neufosterschen Funktionen bereits einen entscheidenden Schritt darstellt, sofern man überall in dem Zweipol vorkommenden Begrenzungsflächen zwischen verschiedenen dispersionsfreien Materialien einschränkende topologische Eigenschaften voraussetzt.

Läßt man freilich beliebige Flächen mit unendlich vielen Verzweigungen zu, so bleibt nicht einmal die Meromorphie des  $\Re/\omega$  erhalten. Ein Beispiel hierfür ist das Leitungssystem in Abb. 3; in ihm soll jeder Strich eine enge am Ende kurzgeschlossene Doppelleitung repräsentieren. Die unendlich vielen Querleitungsstücke sind gleichabständig. Für die Frequenz  $\omega_0$ , für die der Abstand zweier Nachbarn gleich der Wellenlänge  $\lambda_0$  ist, habe die  $n$ -te Querleitung die Länge  $n \cdot \lambda_0$ .

Der Widerstand der  $n$ -ten Querleitung ist dann nach Gl. (23)

$$\Re_n = iZ \tan\left(2\pi n \frac{\omega}{\omega_0}\right). \quad (39)$$

Da sich dieser Widerstand nach Gl. (21) an den Anfang transformiert zu dem Wert

$$\Re'_n = \frac{\Re_n + iZ \tan\left(2\pi n \frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \frac{\Re_n}{iZ} \tan\left(2\pi n \frac{\omega}{\omega_0}\right)}, \quad (40)$$

$$\Re'_n = \frac{2iZ \tan\left(2\pi n \frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \tan^2\left(2\pi n \frac{\omega}{\omega_0}\right)}. \quad (41)$$

Der Zweipolwiderstand selbst ist daher

$$\Re = \sum_{n=1}^{\infty} \Re'_n.$$

Die Reihe konvergiert sicher an  $\omega = \omega_0$ , da dort jeder Summand gleich 0 ist. Es ist  $\Re(\omega_0) = 0$ . Andererseits

hat  $\Re'_n$  Pole mindestens an den Stellen, an denen  $n \frac{\omega}{\omega_0} = m + \frac{1}{8}$  ist, wenn  $m$  eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Pole liegen also sicher vor an

$$\omega_{mn} = \omega_0 \frac{m + 0,125}{n}, \quad (42)$$

d.h. an einer dichten Punktmenge der reellen Achse und auch in jeder Umgebung der Stelle  $\omega_0$ ;  $\omega_0$  ist also sicher eine wesentlich singuläre Stelle, ja sogar jeder Punkt der reellen Achse ist wesentlich singulär.

Schließt man solche Fälle durch passende Voraussetzungen über die topologischen Eigenschaften der Begrenzungsflächen aller Medien aus, so wird vermutlich unmittelbar aus den Maxwell'schen Gleichungen

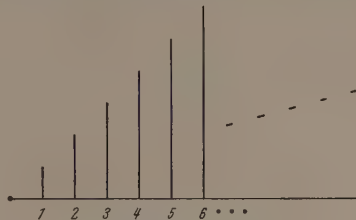


Abb. 3. Schema eines Leitungssystems mit einem  $\frac{1}{4} \Re(\omega)$ , das auf der ganzen reellen Frequenzachse wesentlich singulär ist

der Beweis zu führen sein, daß alle abgeschlossenen Zweipole, die nur verlustlose und dispersionsfreie Medien enthalten, neufosterschen sind.

#### Zusammenfassung

Für das Fostersche Reaktanztheorem wird ein einfacher Beweis mitgeteilt, der als Voraussetzungen physikalischer Natur nur die Maxwell'schen Gleichungen hat und über den Fosterschen Satz hinausgehende Verallgemeinerungen gestattet. So wird unter anderem gezeigt, daß ein Reaktanzzweipol mit endlich vielen verlustlosen Spulen, Kondensatoren, Transformatoren und Leitungen eine „neufostersche“ Frequenzfunktion hat; diese ist eine meromorphe — nicht notwendig rationale — Funktion mit den in der Definition 4 des Abschnitts 9 auf S. 345 aufgezählten Eigenschaften.

Literatur: FOSTER, R. M.: Bell Syst. Techn. J. 1924, 259. — [2] ZOBEL, O. J.: Bell Syst. Techn. J. 1923, 5, 35. — [3] BAERWALD, H. G.: Elektr. Nachr.-Techn. 7, 331 (1930).

Prof. Dr. HANS WOLTER,  
Institut für Angewandte Physik der Universität Marburg

## Kokillenguß von dünnen, einkristallinen Germanium-Platten

VON WOLFRAM BÖSENBERG

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 27. März 1957)

In den letzten Jahren sind eine Reihe von Halbleiter-Bauelementen wie z.B. Dioden, Gleichrichter, Photoelemente und Transistoren entwickelt worden, deren wesentlicher Bestandteil aus einem dünnen Stück Germanium gebildet wird. Gewöhnlich werden die Plättchen aus einem größeren Einkristall heraus-

gesägt. Hierbei entsteht ein nicht unbeträchtlicher Schnittverlust, der bei dem hohen Preis des Germaniums stark ins Gewicht fällt.

Bei der Halbleiter-Technologie braucht man Einkristalle genau definierter Orientierung — beim Legieren z.B. (111)-Oberflächen [1] — und von hoher

Kristallgüte. Als Maß hierfür hat sich die Anzahl von Versetzungslinien bewährt, deren Durchstoßpunkte durch die Kristalloberfläche nach Ätzung als kleine Gruben (etch pits) sichtbar werden [2].

### 1. Anordnung mit Graphit-Gießform

Frühere Verfahren zum Kokillenguß von Germanium [3] mußten modifiziert werden. In Abb. 1

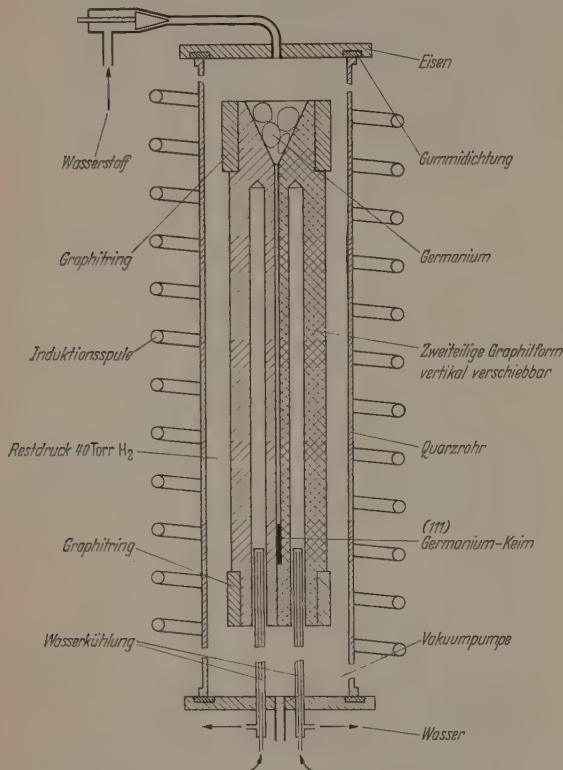


Abb. 1. Graphit-Form zum Gießen von Germanium-Platten. Im mittleren Hohlraum befindet sich unten der von außen gekühlte Germanium-Keim, an dem bei langsamem Absenken der Graphit-Form im Hochfrequenzfeld einkristallines Germanium anwächst

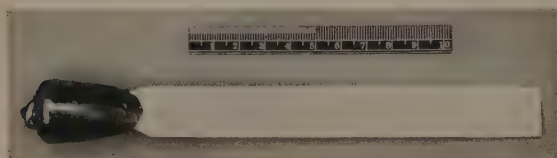


Abb. 2. Germanium-Platte, die in der Graphit-Form von Abb. 1 gegossen wurde. Sie ist 0,6 mm stark. Unten ist der durch vorherige Ätzung dunkler erscheinende Keim zu erkennen. Oben ist das Germanium vom Eingießtrichter zu sehen

ist eine der verwendeten Anordnungen zu sehen. Die zweiteilige Gießform besteht aus spektralreinem Graphit von halbrundem Querschnitt und wird durch zwei Graphit-Ringe zusammengehalten. Da Platten gegossen werden sollen, ist innen in die eine Hälfte der Gießform eine der Plattenstärke entsprechende Vertiefung von 0,2 bis 0,6 mm eingefräst. In das untere Ende des Hohlraums wird ein einkristalliner Keim gelegt, der von außen gekühlt wird. Oben befindet sich ein Trichter, in dem das aufzuschmelzende und in die Form zu gießende Rein-Germanium samt

Zusätzen zur Änderung des spezifischen Widerstandes liegt.

Die Graphit-Form befindet sich in einer Schutzgas-Atmosphäre und ist deshalb von außen von einem Quarzrohr umgeben. Obwohl man z.B. mit durchströmendem Wasserstoff von Atmosphärendruck arbeiten kann, ist es zweckmäßiger, einen Unterdruck von einigen 10 Torr Wasserstoff-Restdruck zu verwenden. Die an der Oberfläche des Germanium-Keims und der Graphit-Form befindlichen Gasblasen werden so am einfachsten entfernt. Die Anordnung wird aus Gründen der Reinheit durch Hochfrequenz geheizt [4].

Die Oberflächenspannung des flüssigen Germaniums hat am Schmelzpunkt einen Wert von 600 dyn/cm [5]. Um diese zu überwinden, muß entweder ein Druck über einen Stempel oder noch besser ein hydrostatischer Druck von etwa 3 bis 5 cm Germanium-Säule ausgeübt werden.

Nach Ausfüllen der Gießform mit flüssigem Germanium wird diese langsam bei weiter anhaltender Hochfrequenzheizung mit einer Geschwindigkeit zwischen 1 und 10 cm/Std abgesenkt. Auf diese Weise wächst das sich verfestigende Germanium am Keim einkristallin weiter. Es wurden fast ausschließlich Keime mit (111)-Oberfläche benutzt. Eine so hergestellte Platte samt Eingießstück ist in der Abb. 2 zu sehen.

### 2. Beobachtungen

Die Art der Kühlung ist nicht kritisch. Statt der ringförmigen Kühlung wie in Abb. 1 ist etwas günstiger als eine ringförmige Kühlung der Graphit-Form von außen. Die Isothermen werden durch die erste Kühlungsart gerader. Die Größe des Temperaturgradienten ist nicht besonders kritisch.

Die Entmischung längs der Ziehachse ist gering, da im Trichterstück verhältnismäßig viel Germanium zurückbleibt, vgl. auch Abb. 2. Schmilzt man eine gegossene Platte zonenweise auf, so kann man den spezifischen Widerstand homogenisieren [6], [7].

Die Güte der so erhaltenen einkristallinen Platten ist nicht übermäßig hoch. Es wurden aber schon bei den ersten Versuchen zwischen  $1 \cdot 10^4$  und  $1 \cdot 10^4$  Ätzgrüben (von 10 bis  $50 \mu$  Ø) pro cm<sup>2</sup> gezählt. Dabei traten oftmals Anhäufungsgebiete auf. Ähnliche Schwierigkeiten sind auch beim normalen Zonenschmelzen im Graphit-Schiffchen entstanden, so daß meist Quarz-Schiffchen vorgezogen werden [7].

### 3. Mit spektralreinem Graphit ummantelte Form aus Quarzglas

Die Gießform wurde gegenüber Abb. 1 im wesentlichen dadurch abgeändert, daß beide Hälften der Graphitform Einführungen für die Aufnahme von Platten aus Quarzglas erhielten. Zwischen beide Quarzplatten wurde wieder ein orientierter Keim gelegt. Bei dieser Form aus Quarz-Platten, die entsprechend der gewünschten Form der Germanium-Platten ausgeschliffen sind. Die Flächen, die mit flüssigem Germanium in Berührung kommen, müssen beruht werden.

Die äußere Ummantelung mit Graphit ist für das Aufheizen des Germaniums zweckmäßig. Man kann auch nach anfänglicher Zustrahlung von Wärme direkt mit Hochfrequenz heizen.



Die Oberfläche der Germanium-Platten, die in der Quarz-Form hergestellt werden, ist viel glatter als die der Platten aus der Graphit-Form. Bei einwandfreier Graphitierung der Quarz-Oberfläche muß die Germanium-Oberfläche spiegelnd glänzen.

Die Güte der in der Quarzform hergestellten Einkristall-Platten ist ziemlich ähnlich der Güte der Platten aus der Graphit-Form, so daß es weitereren Untersuchungen bedarf, um die günstigsten Materialien für die Gießform (bei Variationen der Wachstumsbedingungen) zu finden.

#### 4. Diskussion

Bei dünnen Platten sind nicht so zahlreiche Verzerrungen infolge thermisch verursachter elastischer Spannungen wie im massiven Germanium zu erwarten [8]. Mit einer verbesserten Versuchstechnik, z. B. mit langsamerem Abkühlen, dürften Kristalle mit höherer Kristallgüte erhalten werden.

Die maximal erreichbare Fläche der Kristallplatten hängt nur von der zur Verfügung stehenden Hochfrequenzleistung ab.

#### Zusammenfassung

Durch Eingießen von flüssigem Germanium in eine senkrecht angeordnete, zweiteilige Gießform und langsames Erstarrenlassen an einem eingelegten einkristallinen Keim kann man dünne, einkristalline Germanium-Platten großer Fläche herstellen. Der spezifische Widerstand nimmt längs der Ziehrichtung nur wenig ab, er kann durch Zonenschmelzen weiter homogenisiert werden. Die Kristallgüte, die schon bei ersten Versuchen normale Werte erreichte, kann voraussichtlich noch gesteigert werden.

Herrn H. EBNER danke ich für Unterstützung bei der experimentellen Arbeit.

**Literatur:** [1] MUELLER, C.W., and N. H. DITTRICK: RCA-Review 1956. — [2] VOGEL, F.L., W.G. PFANN, H.E. COREY and E.E. THOMAS: Phys. Rev. **90**, 489 (1953). — KULIN, S.S., u. A.D. KURTZ: Acta metallurgica **2**, 354 (1954). — VOGEL, F.L.: Acta metallurgica **3**, 95, 245 (1955). — PFANN, W.G., u. L.C. LOVELL: Acta metallurgica **3**, 512 (1955). — ELLIS, S.G.: J. Appl. Phys. **26**, 1140 (1955). — [3] RINGER, W., u. H. WELKER: Z. Naturforsch. **3a**, 20 (1948). — JENKINS, A.: US-Patent No. 2667722. — BALDUS, H.: Z. angew. Phys. **6**, 241 (1954). — [4] BÖSENBERG, W.: Diss. T.H. Stuttgart 1955. — Z. Naturforsch. **10a**, 285 (1955). — Z. angew. Phys. **8**, 551 (1956). — [5] KECK, P.H., u. W. HORN: Phys. Rev. **91**, 512 (1953). — [6] PFANN, W.G.: Trans. Amer. Inst. Min. Metallurg. Engrs. a. J. Metals **194**, 747 (1952); **195**, 1441 (1953). — Phys. Rev. **89**, 322 (1953). — [7] BENNETT, D.C., and B. SAWYER: Bell System Techn. J. **35**, 637 (1956). — [8] BILLIG, E.: Referat Halbleitertag Garmisch 1956. — PENNING, P.: Philips Res. Rep. (im Erscheinen).

Dr. WOLFRAM BÖSENBERG,  
Laboratorium der Standard Elektrik AG.,  
Gleichrichter- und Bauelementwerk  
SAF Nürnberg, Platenstraße 66

## Berichte

### Die Radiographie mit künstlich radioaktiven Isotopen

Von Hans Herold

Mit 25 Textabbildungen

(Eingegangen am 5. April 1957)

#### A. Stand der industriellen Radiographie

Das Gebiet der Radiographie mit Röntgenstrahlen mittlerer Härte für industrielle Grobstrukturanalysen wurde bereits in den 20er Jahren gründlich durchforscht und ist heute ein gesicherter Bestandteil der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung. Gegenwärtig zeichnen sich zwei neue Entwicklungsrichtungen ab. In der Röntgenographie besteht die Tendenz, große Materialdicken bei geringem Zeitaufwand zu durchstrahlen und demgemäß immer höhere Spannungen zu verwenden. Es werden dazu Hochspannungsröntgenröhren bis 2000 kV verwandt. Dabei dienen elektrostatische Generatoren und Resonanztransformatoren, die mit Röntgenröhren zu einer Baueinheit zusammengefaßt sind, als Spannungsquellen. Schließlich gestatten Linearbeschleuniger und Betatron die Erzeugung von Röntgenstrahlen maximaler Durchdringungsfähigkeit. Je nach der Ordnungszahl des Prüfmaterials und der Form des Bremsspektrums sind dazu Elektronenenergien von etwa 10 bis 30 MeV nötig.

Andererseits gewinnt mit der Entwicklung der Kernreakorteknik die Radiographie mit  $\gamma$ -Strahlen von künstlichen Isotopen zunehmende Bedeutung.

#### A.1. Isotope für die $\gamma$ -Radiographie

Für eine wirtschaftliche und zweckentsprechende Auswahl der Isotope sind folgende Forderungen maßgebend: Hohe  $\gamma$ -Strahlenausbeute bei günstiger spektraler Verteilung, hohe spezifische Aktivität bei erträglicher Aktivierungszeit; hinreichende Halbwertszeit und billige Gewinnung der Ausgangssubstanzen.

In der Tabelle 1 sind die für radiographische Zwecke zur Zeit verfügbaren Isotope mit allen für den Gebrauch wichtigen Daten zusammengestellt [1].

Von verschiedenen Seiten (WEST, EASTWOOD, MAYNEORD u.a. [2], [3], [4]) wurde in letzter Zeit, unter besonderer Berücksichtigung des Mangels an Quellen weicher Strahlung, die Verwendungsmöglichkeit von neuen Isotopen diskutiert. Die aussichtsreichsten vorgeschlagenen Isotope sind mit den neuesten Daten in Tabelle 2 zusammengefaßt.

Tabelle 1. Isotope zur  $\gamma$ -Radiographie

Isotop	Maximale $\beta$ -Energien und $\gamma$ -Energien [MeV]	Halb- werts- zeit	rh $\mu$ *	Spez. Akti- vität [C/g] (Har- well)	Anwendungs- bereich	Preis (Harwell Jan. 1957)	Herstellung (%) = natürlicher Gehalt des Isotops	$\sigma$ (barn) oder fission yield %	Halbwerts- dicke Pb [cm]
Co <sup>60</sup>	$\beta^-$ : 0,3 $\gamma$ : 1,17 und 1,33	5,3 y	1,35	5	5 ÷ 15 cm Stahl	£ 40/C	Co <sup>59</sup> ( $n, \gamma$ ) Co <sup>60</sup> (100%)	34 b	1,2
Ta <sup>182</sup>	$\beta^-$ : 0,51 u. a. $\gamma$ : 1,22 ÷ 0,15 komplex	112 d	0,61		5 ÷ 15 cm Stahl	£ 20/C	Ta <sup>181</sup> ( $n, \gamma$ ) (100%)		1,2
Cs <sup>137</sup>	$\beta^-$ : 0,52; 1,17 $\gamma$ : 0,667	33 y	0,38	10	0,5 ÷ 7,5 cm Stahl	£ 115/250 mC	aus Spaltprodukten	6	0,8
Ir <sup>192</sup>	$\beta^-$ : 0,67 $\gamma$ : 0,61 ÷ 0,13 komplex	74 d	0,27	5	0,5 ÷ 6 cm Stahl	£ 13/500 mC	Ir <sup>191</sup> ( $n, \gamma$ ) (38,5%)		0,28
Tm <sup>170</sup>	$\beta^-$ : 0,98; 0,87 $\gamma$ : 0,084 und 0,054 Röntgen	127 d	0,0045	5	÷ 7,5 cm Al ÷ 2,5 cm Stahl	£ 36/500 mC	Tm <sup>169</sup> ( $n, \gamma$ ) (100%)	105 b	1 cm Al

\* Spezifische Dosis pro Stunde und Curie in 1,0 m Abstand.

Tabelle 2. Neue vorgeschlagene Isotope zur  $\gamma$ -Radiographie

Isotop	$\beta$ - und $\gamma$ -Energien [MeV]	Halb- werts- zeit	C/g**	Herstellung	$\sigma$ (barn) oder fission yield %	Bemerkung
Ce <sup>144</sup> , Pr <sup>144</sup>	$\beta^-$ : 2,97; 0,3; 0,17 $\gamma$ : 2,185; 1,48; 0,69 und weicher	282 d	380 (CeO <sub>2</sub> )	Spaltprodukt-Extraktion		geringe $\gamma$ -Ausbeute
Am <sup>241</sup>	$\alpha$ : 5,5 $\gamma$ : 0,06 und Röntgen	470 y	3,2	Pu <sup>240</sup> ( $n, \gamma$ ) Pu <sup>241</sup> $\xrightarrow{10 y}$ ( $\beta^-$ ) Am <sup>241</sup>		als Nebenprodukt in Pu-angereicher- ten Reaktoren
Eu <sup>155</sup>	$\beta^-$ : 0,25; 0,15 $\gamma$ : 0,087 und Röntgen	1,7 y	100	(23%) Sm <sup>154</sup> ( $n, \gamma$ ) Sm <sup>155</sup> $\xrightarrow{25 min}$ ( $\beta^-$ ) Eu <sup>155</sup> oder Spaltprodukt-Extraktion	1 b 0,03	aber Sm <sup>149</sup> (13%): 5 · 10 <sup>4</sup> b! mit stabilem Eu <sup>151</sup> u. Eu <sup>153</sup> vermisch
Xe <sup>133</sup>	$\beta^-$ : 0,345 $\gamma$ : 0,081 und Röntgen	5,3 d	1 C/5 $\mu$ l	Xe <sup>132</sup> ( $n, \gamma$ ) oder Spaltprodukt-Extraktion	0,2 b	an aktive Holzkohle adsorbiert

\*\* Erwartete spezifische Aktivität.

#### A.2. Vergleich der $\gamma$ -Radiographie mit der Röntgenographie

Die Verwendung von  $\gamma$ -Isotopen zur Werkstückprüfung bringt gegenüber der Verwendung von Röntgenanlagen folgende Vorteile: Geringer apparativer Aufwand und damit unkomplizierte Handhabung bei leichter Beweglichkeit und kleinen Abmessungen der Strahlenquellen, sowie wesentlich niedriger Anschaffungspreis für die Quellen. Für viele Fälle ist auch die allseitige Ausstrahlung von Vorteil. Sie gestattet gleichzeitige Prüfung mehrerer Werkstücke bzw. eines Stückes an mehreren Orten.

Demgegenüber steht die im Vergleich zu Röntgenröhren geringe Strahlungsintensität und der größere Aufwand für Strahlenschutz.

Die totale emittierte Strahlungsleistung einer Röntgenröhre ist ungefähr

$$I \approx 10^{-9} Z W U \text{ (Watt).}$$

$U$  = Röhrenspannung,

$Z$  = Ordnungszahl des Anodenmaterials,

$W$  = Kathodenstrahlleistung.

Unter der Annahme, daß nur Photonen zwischen  $h\nu_0$  und  $\frac{1}{3}h\nu_0$  mit etwa  $\frac{1}{3}$  der Gesamtintensität des Bremskontinuums für die jeweilige Verwendung brauchbar sind, ergibt sich bei Wolframanoden und

einer mittleren Photonenenergie von  $\frac{2}{3}h\nu_0$ , ein Photonenemission ( $N$ ) pro sec und pro Watt Kathodenstrahlleistung ( $W$ ) von:

$$N = \frac{7,4 \cdot 10^{-8} \cdot U \cdot W}{3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot U \cdot \frac{2}{3}} = 2,3 \cdot 10^{11} \cdot W$$

[Zahl der Photonen/sec]

Rechnet man mit einer Dauerleistung der üblichen Grobstrukturröhren von 2 kW (bei Drehanodenröhre und kurzzeitigem Betrieb kann diese Leistung bis zum 10fachen übertroffen werden), so ergibt sich annähernd und unabhängig von der Röhrenspannung eine Gesamtmission von etwa  $5 \cdot 10^{14}$  Photonen/sec. Dies entspricht einer  $\gamma$ -Quelle mit einer Aktivität von mehr als 10 Kilocurie bei 100%  $\gamma$ -Ausbeute. Quellen dieser Stärke wurden in den USA für spezielle Zwecke (Therapie, Sterilisation usw.) bereits zusammengestellt.

Ein weiterer wichtiger Vergleichspunkt ist die Brennfleckgröße bzw. die wirksame Quellenfläche. Im Interesse der Bildschärfe muß ein möglichst feiner Fokus erzielt werden.

Bei Röntgenröhren ist die Brennfleckgröße durch die maximale Belastbarkeit der Anode bestimmt. Für Wolfram und die Belastungsdauer der Praxis liegen diese etwa bei 100 W pro mm<sup>2</sup>.



Für die  $\gamma$ -Quellen muß aus dem gleichen Grund in die höchstmögliche spezifische Aktivität pro mm<sup>3</sup> aktiven Materials gefordert werden. Theoretisch ist die spezifische Aktivität einer Quelle bei der Aktivierung im Reaktor

$$C_a = 1,62 \cdot 10^{-14} \cdot n \cdot \sigma \cdot \frac{\rho}{A} \left( 1 - e^{-0,69 t/T_{\frac{1}{2}}} \right) \quad [C/mm^3] \quad (1)$$

$n$  = Neutronenfluß/cm<sup>2</sup>/sec,  
 $\sigma$  = Wirkungsquerschnitt des Aktivierungsprozesses,  
 $A$  = Atomgewicht,  $\rho$  = Dichte,  
 $t$  = Aktivierungszeit,  
 $T_{\frac{1}{2}}$  = Halbwertszeit des entsprechenden Isotops.

Bei der Gewinnung aus Spaltprodukten ist die maximal mögliche spezifische Aktivität zu Beginn der Zerfallsperiode:

$$C_b = \frac{0,69 \cdot L \cdot \rho}{A \cdot T_{\frac{1}{2}} \cdot 3,7 \cdot 10^{10}} \quad [C/mm^3] \quad (2)$$

Zum Vergleich ist nun in Tabelle 3 für die drei wichtigsten  $\gamma$ -Quellen angegeben:

a) die wirksame Brennfleckgröße von Röntgenröhren mit einer Strahlenqualität, die der  $\gamma$ -Strahlung der angegebenen Isotope ungefähr äquivalent ist, bei einer Anodenbelastung von 100 W pro mm<sup>2</sup> (für 200 kV-Röhre: Strichfokus 1:4 und 19° gegen Elektronenstrahl geneigte Anode);

b) die Fokusgüte für diese Röhren, definiert als:

$$f = \frac{\text{totale Strahlungsleistung}}{\text{wirksame Fokusgröße}} \quad [Watt/mm^2];$$

c) die experimentell bisher erreichten Aktivitäten der Isotope [5];

d) die unter den gegenwärtigen besten Bedingungen ( $n = 2 \cdot 10^{14}$  n/cm<sup>2</sup>/sec, Chalk River) und bei wirtschaftlichen Aktivierungszeiten theoretisch erreichbare Aktivität nach (1) bzw. (2);

e) und f) Aktivität und totale Strahlungsleistung der  $\gamma$ -Quellen mit gleichem wirksamen „Fokus“ wie die äquivalente Röntgenröhre, spezifische Aktivität wie in c) und mit zylindrischer Form, mit Durchmesser = Höhe;

g) Verhältnis der totalen Strahlungsleistungen:  $\gamma$ -Quelle zu Röntgenröhre bei gleicher Fokusgröße.

Schließlich ist in Tabelle 4 noch ein Vergleich der Anschaffungskosten für die gebräuchliche Isotope und Aktivitäten mit den Kosten für Röntgenanlagen äquivalenter effektiver Strahlungsenergie durchgeführt [6].


Sowohl auf Grund ihrer enormen Strahlungsleistung wie auch auf Grund ihrer Fokusgüte sind die Röntgenröhren den  $\gamma$ -Quellen weit überlegen. Trotzdem sind im MeV-Bereich aus wirtschaftlichen Erwägungen die  $\gamma$ -Quellen vorzuziehen. Die Belichtungszeiten für Werkstücke in der Mitte des günstigen Anwendungsbereichs (für 2000 kV, etwa 10 cm Stahl-dicke) bei den üblichen Abständen liegen für Röntgen-

generatoren in der Größenordnung von Sekunden. Da die Aufbauzeit für die zu prüfenden Stücke aber etwa  $\frac{1}{3}$  Std beträgt, kann man den großen Strahlenausstoß der ziemlich unbeweglichen Generatoren im allgemeinen nicht rationell ausnutzen. Eine Ausnahme wäre die Routineprüfung von leichtbeweglichen Kleinteilen. Andererseits dürften im Anwendungsbereich weicher Röntgenstrahlen, besonders auch für die medizinische Diagnostik, die Verwendung von  $\gamma$ -Quellen keine Bedeutung erlangen, abgesehen von speziellen Fällen, in denen einer der eingangs erwähnten Vorteile entscheidet.

Dies rührt von dem Mangel an geeigneten Isotopen und der prinzipiellen Überlegenheit der Röntgenanlagen.

Dazu ein Beispiel: Selbst eine hypothetische, ideale  $\gamma$ -Quelle (100%  $\gamma$ -Ausbeute, 100% aktive

Tabelle 3. Vergleich zwischen Röntgenröhren und  $\gamma$ -Quellen

a Röntgen- röhre	b Brenn- fleck- größe [mm <sup>2</sup> ]	c Fokus- güte [Watt/ mm <sup>2</sup> ]	d Äqui- valentes Isotop	e Maximale spezifische Aktivität		f  Aktivität [Curie]	g Gesamt- strahlungs- leistung von e [Watt]	h Verhältnis der Gesamt- strahlungs- leistung Röntg./H $\gamma$
				exper. [C/mm <sup>3</sup> ]	theoretisch [C/mm <sup>3</sup> ]			
2000 kV 0,5 mA	10	9,5	Co <sup>60</sup>	0,6	1,0 $t = 6$ Monate	22 C $V = 35$ mm <sup>3</sup>	0,315	300/1
1000 kV 1,5 mA	15	4,8	Cs <sup>137</sup>	0,1 (CsCl)	0,1	6,5 C $V = 65$ mm <sup>3</sup>	0,023	3100/1
200 kV 10 mA	6	3,3	Tm <sup>170</sup>	0,4	0,5 $t = 2$ Monate	8,3 C $V = 16,6$ mm <sup>3</sup>	$9,3 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^5/1$

Atome, 1 Jahr HWZ, mittleres Atomgewicht und mittlere Dichte) mit 80 kV Photonenenergie ergäbe nach (2) und den Quellenabmessungen, entsprechend einem 3 mm<sup>2</sup>-Fokus wie in Tabelle 3e, die maximal

Tabelle 4. Preisvergleich

Isotop	Ak- tivität	Preis DM	Behälter und Zubehör usw.	Röntgen- anlage	Preis DM
Co <sup>60</sup>	$\frac{1}{2}$ C	800.—	1000	2 MeV	360000.—
	10 C	2400.—	7000		
Cs <sup>137</sup>	10 C	6000.—	7000	1 MeV	120000.—
Tm <sup>170</sup>	10 C	—	3500	200 kV	40000.—

überhaupt mögliche Gesamtstrahlungsleistung von etwa 0,1 W (6 mm<sup>3</sup> mit 25 Curie/mm<sup>3</sup>). Dem steht der 70 bis 1500fache Strahlenausstoß moderner Diagnostikröhren mit gleichem Fokus und vor allem deren für die medizinische Anwendung unerläßliche Flexibilität gegenüber.

### A. 3. Die Probleme der $\gamma$ -Radiographie

Um eine Grobstrukturuntersuchung von Werkstücken und Maschinenteilen und Schweißnähten überhaupt sinnvoll zu machen, muß eine gewisse minimale Fehlererkennbarkeit gefordert werden. Diese liegt bei Röntgenstrahlen für günstige Absorberdicken etwa um 1% (von der Art des Fehlertests selbst abhängig), d.h. eine Änderung der durchstrahlten Objekticke um 1% der Gesamtdicke ist auf einem Radiogramm eben noch erkennbar. Bei Verwendung von  $\gamma$ -Strahlen

wird diese Fehlererkennbarkeit nicht erreicht. Sie liegt bei optimalen Bedingungen etwa bei 2%. Die Verschlechterung der Fehlererkennbarkeit rührt im wesentlichen von der geringen Absorption der  $\gamma$ -Strahlen. Für ein homogenes Bündel paralleler Strahlen gilt das Schwächungsgesetz:  $J/J_0 = e^{-\mu D}$ . Da der Massenschwächungskoeffizient  $\mu$  im  $\gamma$ -Gebiet kleine Werte annimmt, steht einer gegebenen Dickendifferenz  $\Delta D$  nur geringer Kontrast in der bildzeichnenden Strahlung gegenüber. Es gilt also, die Qualität der Radiogramme zu steigern. Die Qualität einer Abbildung hinsichtlich der Detailerkennbarkeit wird bei festgehaltener Fehlergröße und Struktur prinzipiell durch 2 Faktoren bestimmt: durch den Kontrast der Details gegen das Umfeld und durch die Zeichenschärfe.

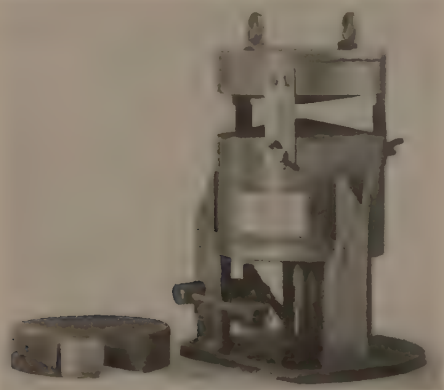


Abb. 1. Behälter für 260 mC  $\text{Cs}^{137}$

Bei gegebener Strahlenhärte ist der Kontrast abhängig von:

1. der Form der Schwärzungskurve des Films (s. B.);
2. den Eigenschaften etwaiger Verstärkerfolien (D. 1);
3. der Streustrahlung aus Objekt und Umgebung (E. 1);
4. den Eigenschaften des Entwicklers (Konzentration, Temperatur und chemische Zusammensetzung) und von der Entwicklungszeit.

Die Zeichenschärfe wird bestimmt durch:

1. Durchmesser der Quelle;
2. Verhältnis zwischen Quelle—Film-Abstand zu Objekt—Film-Abstand (E. 32);
3. Korngröße und Eigenschaften der Verstärkerfolien (D. 4);
4. Korngröße und innere Unschärfe des Films (C., D. 43);
5. Bewegung des Objekts, der Quelle oder des Films.

Es ist stets der für die Betrachtungsart optimale Kontrast bei ausreichender Zeichenschärfe anzustreben.

Neben diese beiden Forderungen, die die Qualität des Bildes betreffen, tritt noch die nach Wirtschaftlichkeit des Verfahrens. Vor allem muß die Belichtungsdauer in erträglichen Grenzen bleiben.

Die Belichtungszeit ist abhängig von:

1. Aktivität und Energiespektrum der Quelle;
2. Absorptionskoeffizient des Objekts;
3. Verstärkungsfaktor der verwendeten Verstärkerfolien;
4. Art und Empfindlichkeit des Films;
5. Quelle—Film-Abstand.

Leider sind die 3 Faktoren Kontrast, Zeichenschärfe und Belichtungszeit so miteinander verknüpft, daß optimale Qualitäten einer Art die der anderen ausschließen. Um jeweils die unter den vielen Variablen ausgewogene, beste Möglichkeit zu finden, ist viel Erfahrung oder bei systematischen Untersuchungen große Mühe und viel Zeitaufwand erforderlich. Dies läßt auch verstehen, warum sich die Radiographie in der Praxis nicht so durchgesetzt hat, wie ihre Möglichkeiten erwarten lassen und warum sehr wenig neuere Arbeiten über Radiographie erscheinen.

Der entscheidende Fortschritt für die Grobstrukturanalyse dürfte deshalb die Entwicklung von Bildverstärkern für Röntgen- und  $\gamma$ -Leuchtschirmbilder sein, wie sie verschiedenorts versucht wird. Dessen ungeachtet werden auch für das Arbeiten mit Bildverstärkern die an den photographischen Verfahren gewonnenen Erkenntnisse ihre Bedeutung behalten.

## B. $\gamma$ -Radiographie mit $\text{Co}^{60}$ und $\text{Cs}^{137}$ . Die Hilfsmittel und ihre Anwendung

Es sollen einige technische Angaben zu den nachfolgenden experimentellen Untersuchungen sowie Hinweise zum quantitativen photographischen Arbeiten mit  $\gamma$ -Isotopen gegeben werden: Als Strahlenquellen wurden  $\text{Co}^{60}$  (19 mC),  $\text{Cs}^{137}$  (260 mC), und  $\text{Tm}^{170}$  (5 mC) benutzt. Das  $\text{Co}^{60}$ - und das  $\text{Tm}^{170}$ -Präparat sind für die praktische Radiographie zu schwach. Um mit der Belichtungszeit bei den üblichen Abständen (etwa 6fache Materialdicke) und bei den günstigen Materialdicken (s. Tabelle 1) im Bereich von Stunden zu bleiben, empfiehlt sich die Verwendung von etwa 100 bis 250 mC der angegebenen Isotope. Das aktive Material der  $\gamma$ -Quellen für radiographische Zwecke (Herkunft: Harwell) ist in etwa 1,5 mm Aluminium gekapselt und hat die Gestalt eines Zylinders, hier mit den Abmessungen  $2 \times 2$  mm (Durchmesser—Höhe). Das Aluminium absorbiert die  $\beta$ -Strahlung vollkommen.

Als Schutzbehälter empfehlen sich Konstruktionen, bei denen zur Bestrahlung lediglich das leichte Präparat ausgefahren wird, ohne schwere Bleiteile bewegen zu müssen. Bewährt hat sich ein Behälter nach Abb. 1 für 260 mC  $\text{Cs}^{137}$ . Er gestattet leichtes mechanisches Ein- und Ausfahren der Quelle, auch für Fernbedienung und wahlweise Einzel- oder Karussellbestrahlung bei optimalem Raumschutz.

Zur Aufnahme von Radiogrammen mit  $\gamma$ -Strahlen eignen sich die handelsüblichen Röntgenfilme<sup>1</sup>. Für die spezielle Verwendung mit  $\gamma$ -Strahlung wären sie

<sup>1</sup> Anhaltswert: Um auf empfindlichen Röntgenfilmen eine Schwärzung von 1,0 über dem Schleier zu erzielen, ist im  $\gamma$ -Bereich gegenwärtig eine Dosis von etwa 0,3—1,0 r (ohne Verstärkerfolien) nötig. Normales lichtempfindliches photographisches Material braucht dazu etwa die 20fache Dosis. Im allgemeinen wird die Empfindlichkeit von Filmen gegenüber  $\gamma$ -Strahlen weit überschätzt.



rdings noch verbesserungsfähig. Hier wurden  
ntgenfilme der Firma Perutz verwendet:

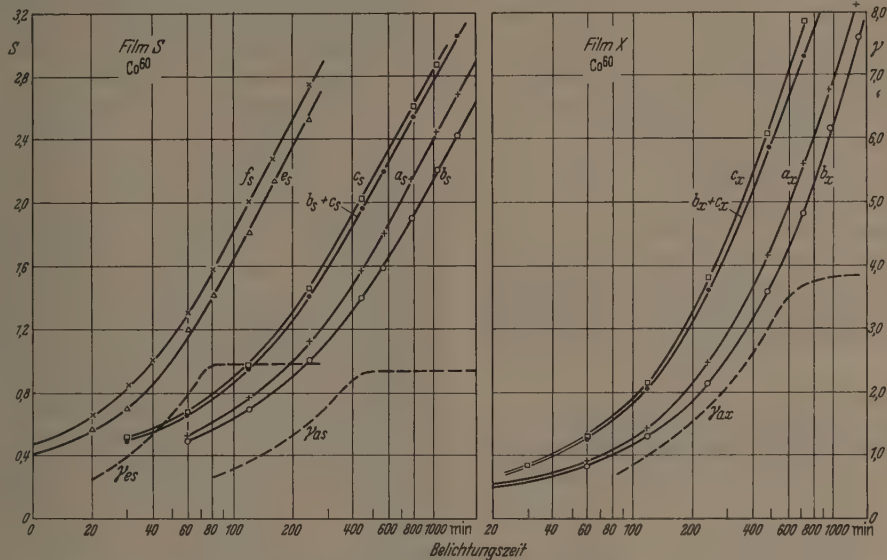
a) Perutz Röntgenfilm Typ S. Höchste Empfind-  
keit, normaler Kontrast; für Leuchtfolien und  
tallverstärkerfolien.

b) Perutz Röntgenfilm Typ X. Silberreich und  
fkrörnig. Sehr empfindlich für direkte Röntgen-  
strahlung.

Soweit die Firmenangaben für das Röntgengebiet.  
Bei beiden Filmen ist der 0,19 mm starke Schicht-  
ger aus Zelluloseacetat beidseitig mit insgesamt

bei abweichender Raumtemperatur wurde eine Kon-  
stanz innerhalb  $\pm 0,3^\circ\text{C}$  erreicht, was einen Schwär-  
zungsfehler von  $\pm 3\%$  entspricht. Die Beobachtung  
der Entwicklungszeit ist weniger kritisch.

Die größten Fehler bringt die unvermeidliche In-  
konstanz der Emulsionseigenschaften auf verschiede-  
nen Filmstücken, besonders aus verschiedenen Liefe-  
rungen. Das Aufbringen von Schwärzungsmarken,  
wie es in der Lichtphotographie üblich ist, kommt bei  
der durchdringenden  $\gamma$ -Strahlung nicht in Frage. Zu  
vergleichende Aufnahmen sind deshalb stets auf dem-



b. 2. Schwärzungskurven für Film S und X mit  $\text{Co}^{60}$  (19 mC); Abstand = 35 cm; a = ohne Verstärkerfolie; b = 0,1 mm  
Hinterfolie; b + c = Blei-Doppelfolie; e = Doppelleuchtfolie (Siemens Diamant); f = wie e + 0,16 mm Pb unter Hinterfolie;  $\gamma$  = Verlauf der  
Gradation. 1 mm Al der Kassette oben und unten

$\mu$  dicker Emulsion begossen. Der mittlere Korn-  
urchmesser von Film X beträgt etwa  $2\mu$ .

Zur Charakterisierung der Filmeigenschaften sind  
Abb. 2a, b die Schwärzungskurven mit Schleier  
( $\log J$ -Diagramm) mit  $\text{Co}^{60}$  für die beiden Filme mit  
rschiedenen Verstärkerfolien und Folienkombina-  
onen dargestellt. Für einige Kurven ist der Verlauf  
r Gradation, wie er durch graphische Differentiation  
 $\frac{\Delta S}{\Delta \log J}$  erhalten wurde, angegeben.

Die Entwicklung der Filme erfolgte in handels-  
lichem, stets frischem Röntgenentwickler unter  
änderiger Bewegung in einer Spiralnutenentwickler-  
se nach einer Standardmethode:

Entwicklungszeit:  $5\frac{1}{2}$  min; Entwicklertemperatur:  
 $18^\circ\text{C}$ ; Konzentration nach Angabe. Schlußwässerung  
it destilliertem Wasser zur Vermeidung von Kalk-  
hleier.

Die Entwicklung in Tanks oder Entwicklerdosen  
stattdess bessere Temperaturkontrolle und zeitlich  
akttes Wechseln der Bäder sowie ruckweises Be-  
egen der Filme. Sie ist der Schalenentwicklung sehr  
berlegen.

Abb. 3 zeigt die Abweichung der Schwärzung in  
rozent bei Änderung der Entwicklungszeit und der  
ntwicklertemperatur. Wie man sieht, ist besonders  
uf Temperaturkonstanz zu achten. Durch ständige  
emperaturkontrolle und Verwendung von Wasserbad

selben Stück Film zu machen. Bei Beachtung aller  
übrigen Vorsichtsmaßnahmen überschreiten die Ab-  
weichungen der Schwärzung auf verschiedenen Film-  
stücken im allgemeinen nicht  $\pm 5\%$ . Bei längeren

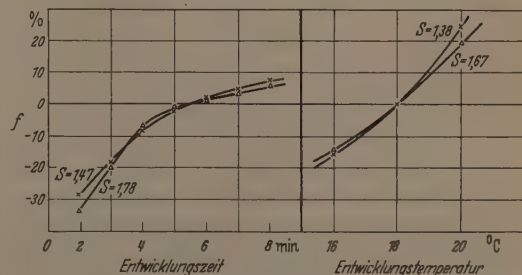


Abb. 3. Abweichung der Schwärzung bei Änderung der Entwicklungszeit  
und -temperatur

Lagerzeiten ist die Schwächung des latenten Bildes  
während der Lagerung zu beachten. Bei normalen  
Raumtemperaturen und Luftfeuchtigkeiten trat bei  
den genannten Filmen und bei Lagerzeiten bis zu  
3 Wochen eine maximale Abnahme der entwickelten  
Schwärzung um 3% auf (bei  $S=0,9$  und  $0,6$ ).

Bei der Schwärzungsmessung sind die Meßpunkte  
über die ganze jeweilige Schwärzungsfläche zu legen  
und Messungen im Randbereich der Filmstücke ganz

zu vermeiden. Hier wurde ein registrierendes Mikrophotometer nach KOCH-GOOS mit Vakuumphotozellen in Kompensationsschaltung verwandt.

Die photographische Wirkung der  $\gamma$ -Strahlung erfolgt beinahe ausschließlich über Sekundärelektronen, die in der Filmumgebung entstehen (s. D. 221). Es ist deshalb im Interesse der Zeichenschärfe immer für innigen Kontakt zwischen dem Film und der elek-

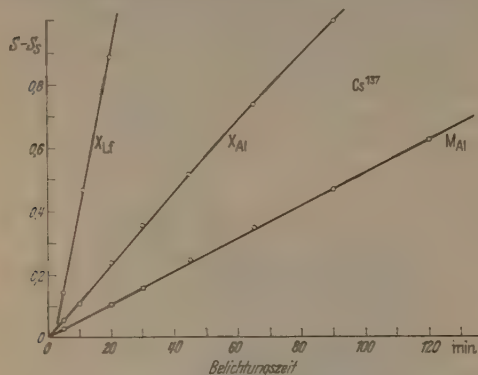


Abb. 4. Schwärzungskurven mit  $\text{Cs}^{137}$  (Schwärzung/Belichtungszeit).  $S_0$  = Schleierschwärzung;  $X_{lf}$  = Film X mit Leuchtfolien;  $X_{Al}$ ,  $M_{Al}$  = Film X, Film M mit Aluminiumumgebung

tronenauslösenden Umgebung zu sorgen. Da die Sekundärelektronen die filmnahe Oberflächenschicht der Umgebung auf den Film abbilden, ist für größtmögliche Homogenität der Filmumgebung besonders an

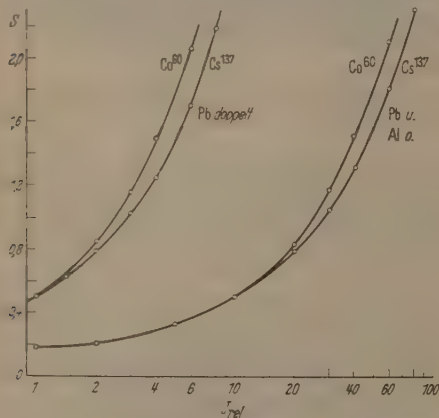


Abb. 5. Schwärzungskurven (Schwärzung log relative Intensität) für Film X mit  $\text{Co}^{60}$  und  $\text{Cs}^{137}$ . Bei  $S = 0,5$  normiert

der Oberfläche zum Film zu achten. (Kein Papier, sondern polierte Metalloberflächen oder unzerkratzte Kunststoffolien.) Bei Bleiverstärkerfolien muß vor der Benutzung die Oxydschicht entfernt werden. Dies geschieht am besten durch Abradieren mit einem ausgesucht weichen Gummi auf einer Glasplatte. Bei Verwendung von Metallfolien niedriger Ordnungszahl muß das Polieren einige Zeit bevor sie in Kontakt mit dem Film gebracht werden geschehen, um eine Schwärzung durch verzögerte Elektronenemission zu vermeiden. Auch durch chemische Einwirkung (frisches Holz, Klebestreifen usw.) kann eine Schwärzung verursacht werden. Um den Einfluß der Streustrahlung von Wänden, Boden und Decke des Raumes zu

vermindern, ist möglichst mit eng ausgeblendetem  $\gamma$ -Strahlenbündel (Bleiblen) zu arbeiten und mindestens die Kassettenrückseite hinreichend mit Blei abzuschirmen. Die Rückstreuelektronen aus der Bleiabschirmung müssen im Kassettenboden absorbiert werden. (Maximale Reichweite von  $\text{Co}^{60}$ -Sekundärelektronen etwa  $450 \text{ mg/cm}^2 = 1,7 \text{ mm Aluminium}$ .) Besser als jede Abschirmung ist großer Abstand zu allen streuenden Objekten.

Bei allen quantitativen photographischen Arbeiten mit ionisierenden Strahlen ist außerordentliche Sorgfalt nötig, damit die Versuchsfehler, die auf dem vielschichtigen Weg bis zum Meßergebnis auftreten, nicht die gesuchten Effekte verdecken. Mehrfache Wiederholung von Versuchen ist unerlässlich.

## C. Photographische Gesetzmäßigkeiten

### C.1. Allgemeines

Für Röntgenstrahlen gilt das Bunsensche Reziprozitätsgesetz, wonach für die photographische Wirkung  $W$  lediglich das Produkt aus Strahlenintensität  $I$  und Belichtungszeit  $t$  maßgebend ist. Es ist also  $W = f(I \cdot t)^p$  mit dem Schwarzschildexponent  $p = 1$ . Für schnelle Elektronen mit Energien im Minimumionisationsbereich und für  $\gamma$ -Strahlen, die Sekundärelektronen in diesem Bereich auslösen, scheint dies besonders bei sehr unempfindlichen Emulsionen, noch nicht ganz gesichert [7]. Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit, bei denen die Strahlenintensität durch Abstandsvariationen im Verhältnis 1:1000 verändert wurde, gaben bei der Verwendung von Film X und  $\text{Co}^{60}$  keine systematische Abweichung vom Reziprozitätsgesetz über die Versuchsfehler hinaus. Die unsystematischen Abweichungen der Schwärzung betrugen bei mittleren Schwärzungen (0,8–1,2) maxima etwa 4%.

Falls die Absorption eines einzigen Quants oder Sekundärelektrons ein Korn entwickelbar macht, besteht bei kleinen Schwärzungen, außer der Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes, auch eine Proportionalität zwischen Belichtung und Schwärzung. Diese Proportionalität wurde auch hier für zwei verschiedenen Filme gefunden (Abb. 4).

Abweichungen von der Proportionalität werden von COWING und SPALDING [8] für Radium- $\gamma$ -Strahlen, von BROMLEY und HERZ [9] für harte Röntgenstrahlen und neuerdings von KARTHUZHANSKII [10] berichtet. Jedoch wurde bisher keine Abweichung vom Reziprozitätsgesetz festgestellt, die nicht durch Versuchsfehler erklärbar wäre.

In der Literatur über Radiographie herrscht die Ansicht, daß sich die Form der Schwärzungskurven (Schwärzung gegen log relative Intensität) vom klassischen Röntgengebiet bis in den Bereich harter  $\gamma$ -Strahlen nicht ändert.

Hier wurde bei Vergleich der Kurven mit  $\text{Co}^{60}$  und  $\text{Cs}^{137}$  ein etwas rascheres Ansteigen der  $\text{Co}^{60}$ -Kurven bei Schwärzungen um 0,6 über dem Schleier gefunden (Abb. 5).

Die Frage nach der Erklärung dieser Abweichung führt auf das Problem der Energieausnutzung in den photographischen Emulsion, bei verschiedenen Wellenlängen im  $\gamma$ -Bereich.

Für sichtbares Licht zeigten EGGERT und NODDAR in mehreren Arbeiten, daß in Übereinstimmung mit



em photochemischen Äquivalentgesetz jedes absorbierte Quant ein Silberion zu metallischem Silber reduziert (photolytisch gebildetes Silber) [11].

Bei den Arbeiten über die Energieausnutzung von Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlen wird der Prozeß der Film-Entwicklung einbezogen, d.h. man setzt die Energieabsorption in der Emulsion bzw. im Silberbromid mit der Zahl der entwickelten AgBr-Körner in Beziehung. Der Energieverlust der ionisierenden Strahlung kann dann auf die entwickelten Körner aufgeteilt werden. Mit der Energie, die nötig ist, um im Silberbromid ein Elektron in das Leitfähigkeitsband zu heben, läßt sich die Zahl der Leitfähigkeitselektronen pro Korn abschätzen und damit Anschluß an Betrachtungen über die Theorie des latenten Bildes finden.

Solche Arbeiten machten HOERLIN und HAMM [12] und GREENING [7] im klassischen Röntgengebiet, während im  $\gamma$ -Gebiet nur orientierende Messungen vorgehen. Es muß erwähnt werden, daß die Extrapolation auf die mittlere Zahl der Leitfähigkeitselektronen pro entwickeltes Korn in dieser einfachen, rein schematischen Art nur dann annähernd richtige Werte gibt, wenn bereits der Durchgang oder die Absorption eines einzigen geladenen Teilchens ein Korn entwickelbar macht. (Die photographische Wirkung der Röntgen- bzw.  $\gamma$ -Strahlung erfolgt über die Sekundärelektronen.)

Braucht ein Korn mehrere „Treffer“, um entwickelbar zu werden, so muß das Problem mit einer Treffertheorie behandelt werden. Dies gilt vor allem für Elektronen mit Energien im Minimumionisationsbereich und für  $\gamma$ -Strahlen, die Elektronen solcher Energie auslösen, in Abhängigkeit von der Empfindlichkeit und Größe der Körner. Ein Sekundärelektron mit etwa 1 MeV kinetischer Energie kann mehrere andere Körner durchqueren. Weiter muß berücksichtigt werden, daß die Energieabgabe von geladenen Teilchen nicht kontinuierlich erfolgt (vgl. Clusterbildung und  $\delta$ -Strahlen in Nebelkammeraufnahmen). Es muß also auch die nutzlos in AgBr-Körnern und der Gelatine absorbierte Energie ermittelt werden. Bei sehr silberreichen Emulsionen ist schließlich noch die „induzierte“ Entwickelbarkeit von Körnern zu beachten (Mitentwicklung von unbelichteten, sehr eng benachbarten Körnern).

Die *experimentelle Aufgabe* besteht darin, die in der Emulsion absorbierte Energie zu bestimmen und mit der erzeugten Schwärzung bzw. spezifischen Kornzahl zu vergleichen.

Die Belichtung der Emulsion und die Energieabsorption muß dabei unter identischen geometrischen Bedingungen und unter sehr definierten Verhältnissen hinsichtlich der Strahlenabsorption stattfinden. Die Beachtung definierter Verhältnisse schließt vor allem die Forderung nach Elektronengleichgewicht im Film und in seiner Umgebung ein. Elektronengleichgewicht herrscht dann, wenn an einem Meßort und in seiner Umgebung die Zahl der absorbierten gleich der Zahl der erzeugten Sekundärelektronen ist. Die Photo- und Compton-Elektronen werden mit zunehmender Energie der  $\gamma$ -Strahlen mehr und mehr in Richtung der auslösenden Strahlung emittiert. Treffen nun  $\gamma$ -Strahlen auf eine Grenzfläche zwischen zwei Materialien mit verschiedener Ordnungszahl (z.B. Luft und Emulsion), so baut sich erst eine Strecke hinter der Grenzfläche ein neues Gleichgewichtsspektrum der Sekundärelektronen auf. Die Dicke der Stör-

zone im Elektronenfluß hinter einer Grenzfläche entspricht etwa der maximalen Elektronenreichweite im betreffenden Material.

Bei quantitativen Messungen im  $\gamma$ -Gebiet muß deshalb die Meßschicht in einer Dicke, die der maximalen Elektronenreichweite entspricht, mit einer Schicht aus gleichem Material oder aus Material mit gleicher effektiver Ordnungszahl umgeben werden. Die Bedeutung dieser Forderung wird in den später folgenden Untersuchungen an Verstärkerfolien erkennbar.

## C.2. Das Bragg-Gray-Prinzip der Hohlraumionisation und seine Anwendung zur Bestimmung der Energieabsorption in der photographischen Emulsion

Die Energieabsorption in der Emulsion wurde in den zitierten Arbeiten nur rechnerisch ermittelt. Sie kann jedoch mit Hilfe einer sog. Fingerhutkammer, deren Wände und Elektroden aus der Photoemulsion bestehen, experimentell bestimmt werden. Nach dem Bragg-Grayschen Prinzip der Hohlraumionisation ist, unter gewissen einschränkenden Bedingungen, der Sättigungsionenstrom in einem kleinen gasgefüllten Hohlraum der Energie proportional, die in der Volumeneinheit des Wandmaterials absorbiert wird. Es ist:

$$E = I W \varrho. \quad (3)$$

$E$  = Energie in MeV, die im Wandmaterial pro Volumeneinheit absorbiert wird;

$I$  = Zahl der Ionenpaare, die im Einheitsvolumen des eingeschlossenen Gases erzeugt werden;

$W$  = mittlere Energie im MeV, die die Sekundärelektronen im Einheitsvolumen des Kammergases pro gebildetes Ionenpaar insgesamt verlieren (auch zu Anregungen);

$\varrho$  = Verhältnis des Elektronenbremsvermögens pro Einheitsweg für das feste Medium zu dem im Kammergas.

Die vollständige Theorie der Hohlraumionisation soll hier nicht erörtert werden [13].

Die Gültigkeit der Formel 3 nach GRAY beruht auf der Annahme, daß ein gasgefüllter Hohlraum in einem festen Medium den Sekundärelektronenfluß nicht stört und im gleichen Sinn wie das feste Material von den Elektronen durchflossen wird. Dies gilt streng — innerhalb von gewissen Grenzen — für beliebig große Hohlräume nur, wenn sich Kammergas und Wandmaterial hinsichtlich der Erzeugung, Streuung und Absorption der Sekundärelektronen bis auf einen konstanten Faktor identisch verhalten. Voraussetzung dazu wäre gleiche Ordnungszahl, die vielleicht durch gleiche chemische Bruttozusammensetzung von Gas und Wand (z.B. Äthylen und Polyäthylen) zu erreichen wäre. Dies ist im allgemeinen nicht möglich, so daß man empirisch eine Kombination mit solchen Eigenschaften (mit gleicher „effektiver“ Ordnungszahl) sucht, die das Bragg-Gray-Prinzip über große Energiebereiche erfüllt.

Ist die effektive Ordnungszahl von Kammergas und Wandmaterial verschieden, so muß die Hohlraumgröße so beschränkt werden, daß die Erzeugung von Sekundärelektronen im Gas keine Rolle spielt. Das Bragg-Gray-Prinzip ist dann nur ein Näherungsverfahren, das aber im Bereich um 1 MeV Quantenenergie sehr gute Ergebnisse liefert. In dieser Hinsicht

wurde in den letzten Jahren von verschiedenen Autoren die Graysche Methode kritisch diskutiert, wobei der Anwendungsbereich oder die Genauigkeit der Methode eingeschränkt oder auch Verbesserungen vorgeschlagen wurden [14] bis [19]. Besonders zu erwähnen ist eine Korrektur von ATTIX und SPENCER [17]. Sie berücksichtigt die Energieabgabe von schnellen  $\delta$ -Elektronen außerhalb des Hohlraums. Durch die Korrektur werden Diskrepanzen zwischen Theorie und Experiment, die vor allem bei Verwendung von Wand/Gas-Kombinationen wesentlich verschiedener Ordnungszahl auftreten, sehr verringert.

Abgesehen von der Forderung nach Elektronengleichgewicht in der gesamten Ionisationskammer, unterliegt auch die Geometrie der Kammer einschränkenden Bedingungen. Der Elektronenfluß, der im  $\gamma$ -Gebiet im Mittel die Photonenrichtung bevorzugt, ergibt einen Ladungstransport. Wenn der Hohlraum in Richtung des Photonenflusses kleine Abmessungen hat und die Elektroden eben ausgebildet sind (z.B. Form eines Plattenkondensators), kann der Ladungstransport, in Konkurrenz zu der geringen spezifischen Ionisation (etwa 50 Ionenpaare pro cm) eine merkliche Veränderung des wahren Ionenstroms verursachen.

Günstig ist deshalb eine Anordnung, bei der eine Elektrode mit möglichst geschlossener Fläche die 2. Elektrode umschließt, wobei letztere kleinen Querschnitt gegen den Elektronenfluß haben soll.

### C. 3. Messung der Energieabgabe in der Emulsion

Die verwendete Ionisationskammer hatte zylindrische Form (15 mm  $\varnothing$ ) und war allseitig einschließlich der Mittelelektrode 1 mm dick mit Emulsion X ausgekleidet. Die Leitfähigkeit der Emulsion war ausreichend. Der Hohlraum war mit Luft bei normalem Druck gefüllt. Die Kammer wurde zu einer Spannung von 320 V aufgeladen, der  $\gamma$ -Strahlung verschiedener Härte ausgesetzt und jeweils der Spannungsabfall in Abhängigkeit von der Bestrahlungszeit mit einem Einfadenelektrometer in Kompensationsschaltung gemessen. Die Zahl der Elementarladungen aus Formel (3) ist:

$$I = \frac{6,24 \cdot 10^{18}}{v} U \cdot C.$$

$U$  = Spannungsabfall in Volt,

$C$  = Kapazität der Kammer in Farad,

$v$  = Hohlraumvolumen in  $\text{cm}^3$ .

Die absorbierte Energie pro Volumeneinheit wird dann

$$E = 6,24 \cdot 10^{18} \cdot C \cdot W \cdot U/v = \text{const} \cdot U. \quad (4)$$

Die Exponierung der Filme X erfolgte am gleichen Ort. Die Filme waren beidseitig mit 1 mm Photoemulsion bedeckt. Alle in Abschnitt B. erwähnten Vorsichtsmaßnahmen, vor allem hinsichtlich Streustrahlung und Entwicklungsfehlern, wurden sorgfältig beachtet. Kein Schwärzungspunkt wich mehr als 0,005 Schwärzungseinheiten von der im Anfangsteil streng geradlinig gefundenen Schwärzungs-/Belichtungszeit-Kurve ab. Die Schwärzungsmessungen waren mindestens bis auf  $\pm 1\%$  bei  $S=0,2$  genau.

Als Ergebnis der Untersuchungen sei nun die relative Energie (bezogen auf  $\text{Co}^{60}$ ) angegeben, die bei anderen Strahlenhärten in der Emulsion X absorbiert

werden muß, um eine Schwärzung von 0,2 über den Schleier zu erzielen.

	$\text{Co}^{60}$	$\text{Cs}^{137}$	$\text{Tm}^{170}$
$E/E_0$	1	$1,3 \pm 0,1$	$1,9 \pm 0,4$

Für die untersuchte Emulsion ergibt sich:

a) Die Energieausnutzung im Sinne der photographischen Wirkung ist nicht, wie bisher angenommen wurde (PELC, BROMLEY-HERZ, GREENING, GLOCKER [20], [9], [7], [21]), unabhängig von der Wellenlänge der Strahlung, konstant. Die Zahl der entwickelten Bromsilberkörner ist also im Bereich zwischen 0,1 und 1,3 MeV nicht streng der von den Körnern bzw. der Emulsion absorbierten Energie proportional.

b) Die Energieausnutzung verbessert sich zu kürzeren Wellenlängen. Die handelsüblichen Röntgenfilme (auch als Dosimeterfilme verwandt) unterscheiden sich in ihrer Korngröße und Elektronenempfindlichkeit nur wenig voneinander, so daß den gefundenen Ergebnissen allgemeinere Gültigkeit zukommt.

### C. 4. Berechnung der absorbierten Energie

Nach GLOCKER [21] wird in einer Schicht der Dicke  $D$  [ $\text{g}/\text{cm}^2$ ] durch auftreffende Röntgen- oder  $\gamma$ -Strahlung ( $E_0$ ), die Elektronenenergie  $E_{\text{el}}$  erzeugt:

$$E_{\text{el}} = E_0 \left( 1 - e^{-\frac{\mu D}{\rho}} \right) \cdot \frac{\alpha \tau + \sigma_a}{\mu}.$$

Ist wie hier  $\frac{\mu D}{\rho} \ll 1$ , so wird:

$$E_{\text{el}} = E_0 D \frac{\alpha \tau + \sigma_a}{\rho} \quad [\text{erg/sec cm}^2]. \quad (5)$$

$\mu/\rho$  = Massenschwächungskoeffizient für die primäre  $\gamma$ -Strahlung [ $\text{cm}^2/\text{g}$ ],

$\alpha$  = Photoelektronenausbeute  $= 1 - \frac{h\nu_K}{h\nu_0} \omega_K$ ,

$\tau/\rho$  = Photoabsorptionskoeffizient [ $\text{cm}^2/\text{g}$ ],

$\sigma_a/\rho$  = Compton-Streukoeffizient, Anteil der Compton-Elektronenenergie [ $\text{cm}^2/\text{g}$ ],

$\frac{\alpha \tau + \sigma_a}{\rho}$  wird auch als Energieabsorptionskoeffizient bezeichnet.

Herrscht in den betrachteten Schichten Elektronengleichgewicht, dann wird in jedem Volumelement der Schicht die gleiche Elektronenenergie absorbiert und erzeugt.

Die auffallende Intensität  $E_0$ , in  $R$  cm Abstand von einer Quelle mit einer Aktivität von  $n$  Curie und Photonenkomponenten mit der Quantenausbeute ist dann:

$$E_0 = n \cdot 3,7 \cdot 10^{10} \cdot \frac{\sum_i \varepsilon_i \cdot (h\nu_i)}{4\pi R^2} \quad [\text{erg/sec cm}^2].$$

Damit wird die absorbierte Elektronenenergie:

$$E_{\text{el}} = n \cdot 3,7 \cdot 10^{10} \cdot \frac{\sum_i \varepsilon_i \cdot (h\nu_i) (\alpha \tau + \sigma_a)}{4\pi R^2} \cdot \frac{D}{\rho} \quad [\text{erg/sec cm}^2]. \quad (6)$$

Der Einfluß der Compton-Streustrahlung kann bei den dünnen Schichten vernachlässigt werden, nicht jedoch die charakteristische Strahlung. Wenn Photonen in der  $K$ -Schale absorbiert werden, wird ein



bruchteil der Photonenenergie  $h\nu_K/h\nu \cdot \omega_K$  als charakteristische Strahlung emittiert.  $\omega_K$  ist die Fluoreszenz- ausbeute für die K-Schale. Für Silber ist  $\omega_K = 0,77$  und für Brom  $\omega_K = 0,57$ . Bei den leichtatomigen Gelatinebestandteilen tritt praktisch keine Photoabsorption auf. Nach Angaben von GREENING [7] kann man die Energie der charakteristischen Strahlung, die aus einer Schicht der Dicke  $\mu D$  entweicht, berechnen.

Aus einer Silberbromidschicht, wie sie in der Filmumgebung vorhanden ist, entweichen nach Berechnung etwa 15% (6%) der charakteristischen Strahlung vom Silber (Brom). Es wurde nun vereinfachend angenommen, daß sich dieser Verlust an Fluoreszenzstrahlung gleichmäßig auf die Vorschaltsschichten-Film-Kombination verteilt und  $\tau$  entsprechend korrigiert ( $\tau_c$ ).

$\tau_c$  weicht so wenig von  $\tau$  ab, daß die Vereinfachung keinen Fehler bringt.

Der effektive Energieabsorptionskoeffizient (hier  $\frac{\tau_c + \sigma_a}{\rho}$ ) für eine Verbindung oder ein Gemisch ist nun:

$$a_1 \frac{(\tau_c + \sigma_a)_1}{\rho_1} + a_2 \frac{(\tau_c + \sigma_a)_2}{\rho_2} + \dots,$$

wobei  $a_i$  die Gewichtsanteile der verschiedenen Elemente im Absorber sind. Sie wurden für die Emulsion X maßanalytisch bestimmt. Die Absorptionskoeffizienten wurden nach Tabellen und Kurven von DAVISSON-EVANS [22] ermittelt.

Ist nun, wie hier, die Reichweite der Sekundärelektronen groß gegen den Korndurchmesser (die Reichweite variiert von 0,1 bis 1,0 MeV von etwa  $60 \div 2000 \mu$  Emulsionsdicke, der mittlere Korndurchmesser ist etwa  $2 \mu$ ), und nimmt man homogenen Elektronenfluß an, so wird sich die absorbierte Elektronenenergie zwischen Silberbromid und Gelatine im Verhältnis der spezifischen Bremsvermögen beider verteilen.

$$\frac{\text{Energieabs. AgBr}}{\text{Energieabs. Gelatine}} = \frac{\text{Masse AgBr} \cdot \text{Elektronen/g}}{\text{Masse Gelatine} \cdot \text{Elektronen/g}} \times \frac{\text{Bremsvermögen/Elektron AgBr}}{\text{Bremsvermögen/Elektron Gelatine}}.$$

$$K = K_m \cdot K_n \cdot K_b.$$

Mit  $K_b = 0,81$  (GRAY [23]) wird der Bruchteil der Gesamtenergieabsorption im AgBr gleich  $K/1 + K = 0,31$ .

Unter Anwendung der Formel (6) mit den bekannten Aktivitäten der Präparate, den Energieabsorptionskoeffizienten und den experimentellen Gegebenheiten (Abstand  $R$  und Belichtungszeit) ergibt sich nun die Energie, um pro  $\text{cm}^2$  der AgBr-Schicht des Films X eine Schwärzung von 0,2 über dem Schleier zu erzielen, zu:

$$0,05 \text{ erg/cm}^2 \text{ AgBr für Co}^{60},$$

$$0,07 \text{ erg/cm}^2 \text{ AgBr für Cs}^{137}.$$

Auch bei Verwendung der rechnerisch ermittelten Energieabsorption wird das rein experimentell gefundene Ergebnis bestätigt: Gleiche absorbierte Energie kann im  $\gamma$ -Gebiet mit zunehmender Wellenlänge geringere Schwärzung erzeugen.

Um auf die absorbierte Energie pro AgBr-Korn schließen zu können, muß die Zahl der entwickelten Körner pro Flächeneinheit der Emulsion bekannt

sein. Kornzählungen wurden nicht durchgeführt. Für eine Abschätzung genügt die Beziehung zwischen Schwärzung  $S$  und der Kornzahl/ $\text{cm}^2$   $n$ , nach NUTTING [24].

$$S = 0,434 \cdot \bar{a} \cdot n \quad (7)$$

$\bar{a}$  = mittlere projizierte Kornfläche.

Berücksichtigt man, daß nach ANDRESEN [25] die mit Formel (7) ermittelte Kornzahl etwa 2,7mal zu hoch ist und nimmt man hier  $\bar{a}$  zu  $4 \mu^2$  an, so ergibt sich die Zahl der entwickelten Körner für jedes Sekundärelektron, das im AgBr der Emulsion absorbiert wurde etwa zu:

$$60 \text{ AgBr Körner/Sekundärelektron für Co}^{60},$$

$$20 \text{ AgBr Körner/Sekundärelektron für Cs}^{137}.$$

Die Zahl der Sekundärelektronen wurde durch Division der absorbierten Gesamtelektronenenergie durch die jeweilige mittlere Energie der Sekundärelektronen berechnet.

Mehrfacher Elektronendurchgang durch ein Korn ist bei den geringen Schwärzungen unwahrscheinlich. Da die Wechselwirkungsprozesse der Quantenstrahlung jeweils ein Elektron in Freiheit setzen, kann man formal auch von entwickelbaren AgBr-Körnern pro absorbiertes Quant sprechen. Jedoch darf diese Größe nicht durch Division der absorbierten Gesamtenergie durch die mittlere Quantenenergie gewonnen werden, da der überwiegende Teil der sekundären Wellenstrahlung aus der Emulsion entweicht.

Der mittlere Energieverlust von  $\beta$ -Strahlen, um in AgBr ein Elektron in das Leitfähigkeitsband zu heben, ist nach [26] 5,8 eV. Damit ergibt sich:

	Mittlere Energieabgabe/Korn	Primär gebildete Leit- fähigkeitslektronen/Korn
Co <sup>60</sup>	$1,17 \cdot 10^{-8} \text{ erg/Korn}$	1250
Cs <sup>137</sup>	$1,88 \cdot 10^{-8} \text{ erg/Korn}$	2000

### C.5. Diskussion der Ergebnisse

Nach den experimentellen und rechnerischen Ergebnissen haben die höherenergetischen Sekundärelektronen des untersuchten Bereichs, bei gleicher absorbiertener Gesamtenergie, größere photographische Wirkung als niederenergetische Elektronen. Dies läßt sich offensichtlich nur verstehen, wenn man die Entwickelbarkeit eines Korns als Ergebnis eines Trefferereignisses wertet. Wird ein Korn von einem Elektron beliebiger Energie überhaupt getroffen, so genügen die bei einem Elektronendurchgang angelegten Entwicklungskeime, um das Korn entwickelbar zu machen. Beim Durchgang von niederenergetischen Elektronen mit ihrem höheren spezifischen Energieverlust findet eine „Überbelichtung“ des Korns statt. Es werden mehr Elektronen in das Leitfähigkeitsband gehoben und mehr primäre Silberkeime gebildet als zur Entwickelbarkeit des Korns notwendig wären. Ganz überschlägig müßte sich dann das Energieverhältnis für verschiedene Primärquantenenergien ( $E/E_0$  s. C. 3), um gleiche Schwärzung zu erhalten, wie das relative Bremsvermögen der zugeordneten mittleren Sekundärelektronenenergien verhalten. Das letztere Verhältnis für Cs<sup>137</sup>/Co<sup>60</sup> ergibt sich zu ungefähr 1,2; etwa in Übereinstimmung mit den experi-

mentellen Ergebnissen für  $E/E_0$ . Im allgemeinen besteht für eine gegebene Emulsion (mit bestimmter Korngröße und Kornempfindlichkeit) ein Schwellenwert der Elektronenempfindlichkeit. Die Elektronen dürfen eine bestimmte Energie nicht überschreiten, um ein Korn in einem Durchgang entwickelbar machen zu können. Genügen dazu Elektronen mit Energien im Minimumionisationsbereich (mit der geringsten Energieabgabe pro Wegeinheit  $dE/dx$ ; diese steigt zu sehr hohen Elektronenenergien wieder an), so nennt man die Emulsion minimumionisationsempfindlich. Dieser Begriff unterliegt keiner scharfen Definition.

In der Kernemulsionstechnik bezeichnet man Emulsionen schon als minimumionisationsempfindlich, wenn man überhaupt eine zusammenhängende Spur für die betreffenden Teilchen identifizieren kann.

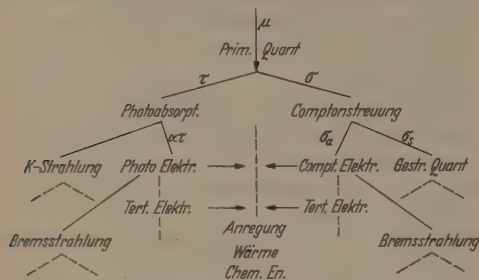


Abb. 6. Wechselwirkungsprozesse für  $\gamma$ -Strahlen (ohne Paarbildung)

Die Spur besteht dann wegen der diskontinuierlichen Energieabgabe aus Kornballungen und größeren Lücken<sup>1</sup>.

HOERLIN [27] gibt die Energie an, die pro Oberflächeneinheit eines Korns mindestens absorbiert werden muß, um das Korn entwickelbar zu machen. Für Röntgenstrahlen beträgt sie  $2 \cdot 10^{-8}$  erg/ $\mu^2$  Kornoberfläche. Hier wird mit etwa  $10^{-9}$  erg/ $\mu^2$  dieser Wert nicht erreicht. Sicher ist diese minimal nötige Energie durch die in den letzten Jahren eingeführte Goldsensibilisierung noch verringert worden. (Es ist auch fraglich, ob die Kornoberfläche die richtige Bezugsgröße ist.)

Tatsächlich scheint, entsprechend den Versuchsergebnissen, die Emulsion X annähernd minimumionisationsempfindlich zu sein.

### C. 6. Anwendung der photographischen Gesetzmäßigkeiten

Bei den nachfolgenden Untersuchungen werden die photographisch bewerteten Intensitäten der  $\gamma$ -Strahlen verglichen. Photographisch bewertete Intensität heißt: Die Intensitätswerte werden durch Vergleich von gemessenen photographischen Schwärzungen mit Eichschwärzungen gewonnen. Die Eichschwärzungen sollen unter identischen Bedingungen auf dasselbe Filmstück (hier meist nicht möglich) aufgebracht werden. Bei niederen Schwärzungen ist  $S$  der photographisch bewerteten Intensität  $I$  proportional. Bei Schwärzungen über 1,0 müssen die Schwärzungskurven punktweise in Intensitätskurven umgezeichnet werden. Hat die  $S$ -Kurve einen linearen Teil, so kann

<sup>1</sup> Der mittlere Korndurchmesser bei Kernemulsionen ist etwa  $1/10$  des Korndurchmessers bei Röntgenemulsionen.

man  $I$  mit

$$\Delta \log I = \Delta S / \gamma \quad (8)$$

berechnen. Ändert sich die Objektdicke von  $D$  auf  $D \pm n \cdot \text{Halbwertsschichten (HWS)}$ , so ist, um gleiche Schwärzung zu erhalten, die Belichtungszeit von  $b$  auf  $b' = b \cdot 2^{\pm n}$  zu ändern. Bei konstant gehaltener Belichtungszeit ist der Wirkungskontrast im Film (Differenz der photographisch bewerteten Intensitäten) bei den Objektdicken  $D$  und  $D \mp \Delta D$  gegeben durch

$$\pm \Delta I = \pm I e^{-\mu \Delta D} = \pm I \cdot 2^{\frac{-\Delta D}{(\text{HWS})}}.$$

## D. Untersuchungen an Verstärkerfolien

### D. 1. Allgemeines

Wie im Röntgengebiet, kommt auch in der  $\gamma$ -Radiographie des MeV-Bereiches den Verstärkerfolien im Interesse einer kurzen Belichtungsdauer große Bedeutung zu. Jedoch sind die erreichbaren Verstärkungsfaktoren hier wesentlich geringer.

Der Verstärkungsfaktor  $f$  ist definiert durch:

$$f = T/T_v.$$

$T$  = Belichtungszeit ohne Verstärker, um eine bestimmte Schwärzung zu erreichen,  
 $T_v$  = Zeit, um die gleiche Schwärzung mit Verstärker zu erreichen.

Im MeV-Gebiet erreicht  $f$  Werte um 2 bis 10, im mittleren Röntgenbereich dagegen 30 bis 70. Nach Art des Verstärkungsmechanismus unterscheidet man Leuchtfolien und Schwermetallfolien. Die Wirkung der Leuchtfolien beruht auf dem Fluoreszenzleuchten durch Röntgen- bzw. durch  $\gamma$ -Strahlen. Für den photographischen Prozeß sind also die Gesetzmäßigkeiten für sichtbares Licht maßgebend. Der Verstärkungsmechanismus der Schwermetallfolien wurde bisher nicht eindeutig quantitativ erklärt.

An alle Folienarten sind folgende Anforderungen zu stellen: Hohe Verstärkungswirkung, gute Zeichenschärfe und eventuell Erhöhung des Kontrasts.

### D. 2. Die Verstärkungswirkung verschiedener Metalle

#### D. 21. Überblick über die physikalischen Prozesse zur Verstärkungswirkung verschiedener Metalle

Trifft  $\gamma$ -Strahlung auf Materie, so können die in Abb. 6 dargestellten Wechselwirkungsprozesse stattfinden. (Ohne Berücksichtigung der Paarbildung. Sie ist erst über 1,02 MeV Primärenergie zu beachten.) Die sekundäre Wellenstrahlung unterliegt wieder den gleichen Wechselwirkungsprozessen wie das Primärquant (multiple Streuung). Dies wiederholt sich bis zur völligen Umwandlung der Primärenergie in Wärme oder chemische Energie. Im Verlauf der Energieumsetzungen verschieben sich die Anteile der verschiedenen Einzelprozesse, in Abhängigkeit von der Energie der Quantenstrahlung und von der Ordnungszahl des Absorbers.

Für die Betrachtungen an Verstärkerfolien kommt wegen ihrer geringen Dicke nur einmalige Wechselwirkung der Quanten in Betracht. Liegt bereits Streustrahlung vor, so rechnet man diese zweckmäßigerweise zur Energieverteilung der Primärstrahlen hinzu.



si sehr niederen Quantenenergien herrscht Photoabsorption vor. Diese nimmt aber sehr schnell mit zunehmender Quantenenergie ab, und der Compton-Effekt gewinnt relativ mehr an Bedeutung. Der Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung nimmt mit wachsender Photonenenergie ab. Bei Energien um 1 MeV erfolgt die Schwächung der Strahlung fast nur durch Compton-Effekt. Der allgemeine Verlauf der Kurven für die Absorptionskoeffizienten in Abhängigkeit von der Quantenenergie ist zwar für verschiedene Elemente gleich, jedoch ist die Energie, bei der die einzelnen Prozesse vorherrschen von Element zu Element verschieden: Bei Aluminium z.B. ist die Photoabsorption noch bei 0,2 MeV vernachlässigbar klein, während sie bei Blei bis 0,5 MeV überwiegt und bis 2 MeV Bedeutung behält (Abb. 7). Die photographische Wirkung der  $\gamma$ -Strahlung im Bereich um 1 MeV erfolgt über die Sekundärelektronen (Compton- und Photoelektronen). Der Anteil von Elektronen aus sekundärer Wellenstrahlung ist gering.

Die Energie der Photoelektronen entspricht nahezu der Quantenenergie, während die Compton-Elektronen eine breite Energieverteilung mit einer mittleren Energie von etwa der Hälfte der Quantenenergie haben.

Die Richtungsverteilung beider Elektronenarten ist bevorzugt im betrachteten Energiebereich die Richtung der auslösenden Photonen (s. Abb. 18).

Auf ihrem Weg in den Folien erleiden die Elektronen durch fortgesetzte elastische und unelastische Stöße (meist kleine) Richtungsabweichungen und diskontinuierliche Energieverluste. Die Strecke, bis die Elektronen infolge der vielen Einzelablenkungen vollkommen diffus geworden sind, bezeichnet man als Diffusionsdicke. Der maximal mögliche Energie-transport in der Primärrichtung wird durch den Begriff der maximalen Reichweite charakterisiert. (Die genaue Definition soll hier nicht erörtert werden.)

Addieren sich die Einzelablenkungen (im Sinne eines Vorwärtstransports) ungünstig, so erhält das Elektron schließlich eine Geschwindigkeitskomponente gegen die Primärrichtung: Das Elektron wird zurückgestreut (Rückdiffusion). Der Rückstreukoeffizient  $p$  bezeichnet das Verhältnis der durch eine Grenzfläche rückdiffundierenden zu den insgesamt auftretenden Elektronen und wird meist für Sättigungsrückstreuung angegeben (Abb. 8). Werden die Elektronen homogen im Volumen ausgelöst, so entspricht  $p$  etwa der relativen Zahl von Sekundärelektronen, die die Normalebene zur Primärstrahlung in ihrem Entstehungsort, gegen die Primärrichtung passieren. Das Verhältnis von Rückstreukoeffizienten für verschiedene Materialien ist ein Maß für die relative Zahl von Elektronen, die keine Chance haben, eine Meßschicht (Film) zu erreichen.  $p$  wächst ziemlich unabhängig von der Energie, zunächst rasch mit der Ordnungszahl, um bei hohen Ordnungszahlen nur noch wenig zuzunehmen.

Mit den angedeuteten Gesetzmäßigkeiten ergibt sich für die Wirkung der Folien folgendes Bild: In den Verstärkerfolien werden in berechenbarer Energie- und Winkelverteilung homogen Sekundärelektronen ausgelöst. Die Annahme homogener Elektronenerzeugung ist berechtigt, solange die Schwächung der  $\gamma$ -Strahlung auf der Strecke der Elektronenreichweite vernachlässigbar ist. Elektronen, die innerhalb ihrer

Reichweite vor der Emulsion entstehen, können ihren Weg in der Emulsion beenden, oder die Emulsion unter Energieverlust passieren. Die Reichweite von Sekundärelektronen mit Energien von 0,5 bis 1 MeV ist erheblich größer als die Dicke der Photoemulsion (90 bis 450 mg/cm<sup>2</sup> Reichweite gegen 8 mg/cm<sup>2</sup> Emulsionsdicke). Die Energieabgabe der Elektronen

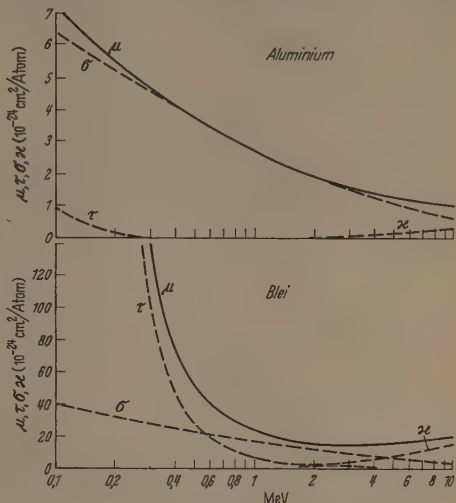


Abb. 7. Gang der Absorptionskoeffizienten mit der Quantenenergie für Blei- und Aluminiumabsorber [22]

in der Emulsion ist von ihrer Restenergie, ihrem Weg in der Schicht und vom Bremsvermögen der Emulsion abhängig. Je nach der Ordnungszahl der aufliegenden Folien erleidet ein kleinerer oder größerer Teil der ausgelösten Elektronen so starke Streuung in der

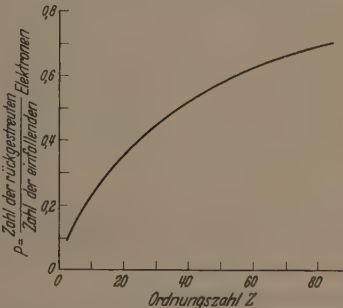


Abb. 8. Rückstreukoeffizient für diffusen Elektroneneinfall nach LANDOLT-BÖRNSTEIN

Folie, daß sie die innerhalb ihrer Reichweite liegende Emulsion nicht erreichen und ihre Energie ausschließlich in der Folie abgeben, oder die Folie auf der Rückseite verlassen. Die Verstärkungswirkung von Rückfolien beruht auf dieser Rückdiffusion von Elektronen, die in ihr entstehen, sowie auf der Rückstreuung von auftretenden Elektronen, die aus dem Film oder der oben liegenden Folie stammen.

Die experimentellen Ergebnisse (Abb. 9) für die Rückfolien zeigen einen linearen Anstieg der relativen photographisch bewerteten Intensität  $I/I_0$  mit  $\log(Z+1)$  bis  $Z \approx 50$ , in Übereinstimmung mit Ionisationskammermessungen von G. HINE [31]. Die Ener-

gieabsorptionskoeffizienten  $\frac{\alpha\tau + \sigma_a}{\rho}$  sind bis zu mittlerem  $Z$  annähernd unabhängig von  $Z$ , so daß die Erhöhung der Verstärkung allein auf die vermehrte Rückstreuung mit wachsendem  $Z$  (Abb. 8) zurückzuführen ist. Bei hohem  $Z$  bekommt die zusätzliche Elektronenerzeugung durch Photoabsorption dominierenden Einfluß und zwar um so stärker je niedriger die Quantenenergie ist (vgl. Abb. 9, Kurve  $u$  für  $\text{Cs}^{137}$  und  $\text{Co}^{60}$ ). Damit steigt auch die rückgestreute Sekundärelektronenintensität rasch an.

Die Verstärkungswirkung der Vorderfolien in Abhängigkeit von der Ordnungszahl erklärt sich entsprechend den angegebenen Gesetzmäßigkeiten ebenfalls qualitativ aus dem Zusammenwirken von Elektronenerzeugung und Rückstreuung: Anfänglicher

erhielten nur 4% der Schwärzung bei normaler Exposition. Da Radium auch weiche Komponenten im Spektrum hat, ist für  $\text{Co}^{60}$  Primärstrahlung die direkte Strahlenwirkung eher noch geringer. Für einmal gestreute Primärstrahlung mit einer mittleren Energie von etwa 0,65 MeV kann man, nach dem später angewandten Verfahren, einen Schwärzungsbeitrag der direkten Strahlenwirkung von etwa 2% abschätzen. (Für freie Emulsionsschichten von Film X. Die Schichtträger erhöht diesen Beitrag noch etwas.) Die photographisch wirksamen Sekundärelektronen stammen demnach beinahe ausschließlich aus der Filmumgebung.

Zu c). Nach W. HEITLER [29] ist der mittlere Energieverlust für Bremsstrahlenerzeugung pro Masse und Flächeneinheit gegeben durch:

$$-\left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}} = 3,44 \cdot 10^{-4} (E + mc^2) \frac{Z^2}{A} \frac{\Phi_{\text{rad}}}{\Phi}$$

wobei

$$\bar{\Phi} = r_0^2 Z^2 / 137; \quad r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$$

$\Phi_{\text{rad}}$  = atomarer Wirkungsquerschnitt für Bremsstrahlenerzeugung.

Der Energieverlust für Bremsstrahlenerzeugung wächst also mit der Gesamtenergie der Elektronen und mit  $Z^2$  des Absorbers.

Für 1 MeV Elektronen und Blei ergibt sich mit den Werten der Bethe-Heitler-Sauter-Theorie ein Energieverlust von 0,1 MeV/g/cm<sup>2</sup>. Dies entspricht ungefähr 3% der Gesamtenergieabsorption. Nach einer neueren Arbeit von MOTZ [30] sind allerdings die  $\Phi_{\text{rad}}/\bar{\Phi}$ -Werte nach HEITLER für hohes  $Z$  um etwa 100%, für niedriges  $Z$  um etwa 30% zu niedrig. Praktisch ist aber in jedem Fall die Wirkung der Bremsstrahlung vernachlässigbar.

Zu d). Charakteristische Strahlung: Wenn Photonen der Energie  $h\nu$  in der K-Schale absorbiert werden, wird ein Bruchteil ihrer Energie  $\frac{h\nu_K}{h\nu} \omega_K$  als charakteristische Strahlung reemittiert.  $\omega_K$  ist die Fluoreszenzausbeute. Sie steigt mit der Ordnungszahl an. Für Blei (Kupfer) ist  $\omega_K = 0,95$  (0,46);  $\omega_K h\nu_K/h\nu_0$  beträgt für Blei 0,07 bei 1,25 MeV und 0,125 bei 0,67 MeV. Die Photoabsorption stellt aber nur einen Bruchteil der Gesamtenergieabsorption dar. Insgesamt beträgt die K-Strahlenenergie für Bleiabsorber nur 2,2% (8%) der ausgelösten Sekundärelektronenenergie für 1,25 (0,67) MeV Primärquantenenergie. Für leichtatomige Filmumgebung ist die K-Strahlung vernachlässigbar gering.

Zu a) und b). Die wesentliche Ursache für die photographische Wirkung der  $\gamma$ -Strahlen sind also die Sekundärelektronen, die in der Filmumgebung, sei es Verstärkerfolie, Kassette oder Luft, von der primären  $\gamma$ -Strahlung ausgelöst werden. Die Streustrahlung wird wegen ihrer großen Reichweite zum Primärspektrum zugerechnet.

D. 222. Berechnung der Energieabsorption in einer photographischen Emulsion bei vorgeschalteten Metallfolien verschiedener Ordnungszahl

Zur Abschätzung der relativen Energieabsorption bei verschiedenen aufliegenden Metallfolien ist ein halbempirisches Rechenverfahren nach GLOCKER [21] geeignet.

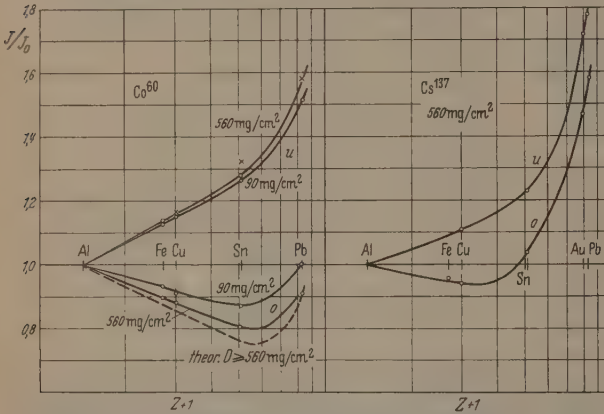


Abb. 9. Relative photographisch bewertete Intensität in Abhängigkeit von  $\log(Z+1)$  für Metallfolien.  $o$  = Metalle über dem Film,  $u$  = Metalle unter dem Film (1 mm Al der Kassette auf Gegenseite).  $x$  = Messungen von HINE mit Ionisationskammer [31]

Abfall der Verstärkungskurven mit der Ordnungszahl (die Rückdiffusion nimmt zu, während die Elektronenerzeugung annähernd konstant bleibt). Nachdem die Kurve bei mittleren Ordnungszahlen ein Minimum durchlaufen hat, folgt mit dem Einsetzen der zusätzlichen Photoelektronenerzeugung steiler Anstieg bei hohen Ordnungszahlen.

## D. 22. Metallfolien über dem Film

D. 221. Vergleich der photographischen Wirksamkeit für Sekundärelektronen verschiedener Herkunft

Photographisch wirksam sind:

1. Elektronen, die im Film selbst entstehen,
2. Elektronen, die in der Umgebung des Films entstehen.

Die Elektronen können erzeugt sein:

- a) von primärer  $\gamma$ -Strahlung,
- b) von sekundärer  $\gamma$ -Strahlung (Compton-Streustrahlung),

c) von der Bremsstrahlung, die durch Abbremsung der schnellen Photo- und Compton-Elektronen im Coulomb-Feld der Absorberatome entsteht,

d) von der charakteristischen Strahlung, die beim Photoeffekt auftritt.

Zu 1. E. HARRINGTON u. a. [28] bestimmten die Schwärzung, die nur durch Absorption von Ra- $\gamma$ -Strahlen im Film selbst entsteht, indem sie Filme im Vakuum und starkem Magnetfeld exponierten. Sie



Es wurde für die hier vorliegenden Verhältnisse diffiziiert. Insbesondere wurde auch die Rück-  
euerung von Elektronen berücksichtigt. Die Grund-  
anken des Verfahrens sind etwa: In einer Vorschalt-  
schicht über einer ebenen Meßschicht wird,  
ch die Wechselwirkungsprozesse der Photonen-  
ahlung mit der Materie, ein homogener Elektronen-  
B erzeugt (Vereinfachung a) und b) s. unten). Die  
eugte Elektronenenergie läßt sich mit bekannten  
rkungsquerschnitten für die Einzelprozesse be-  
hnen [Formel (5)]. Von der Energie des einzelnen  
lektrons geht, je nach dem (geradlinig gedachten)  
eg, den das Elektron bis zur Erreichung der Grenz-  
e zur Meßschicht zurückgelegt hat, nur ein Bruch-  
l der Anfangsenergie in die Meßschicht über. Mit  
lfe von empirisch gewonnenen Formeln, die die  
ichweite  $R$  des Elektrons mit seiner Energie ver-  
rüpfen, und durch Integration über die nutzbare  
eke der Vorschaltsschicht läßt sich aus den Rest-  
chweiten der gesamte Energiefluß durch die Grenz-  
e zur Meßschicht bestimmen. Der Energiefluß  
ch die rückwärtige Grenzfläche der Meßschicht  
d ebenso ermittelt. Dabei ist der Teilweg der  
lektronen in der Meßschicht gesondert zu behandeln  
(deres Bremsvermögen) und gegebenenfalls die in  
e Meßschicht erzeugte Energie zu berücksichtigen  
(dere Wirkungsquerschnitte). Die Differenz der Ener-  
flüsse gibt dann die Energie, die in der Meßschicht  
sorbiert wurde. Das Verfahren muß, je nach dem  
hältnis der Vorschalt- und Meßschichtdicke zur  
elektronenreichweite, sinngemäß modifiziert werden.

Die Compton-Elektronen haben bereits eine breite  
fangsenergieverteilung. Um eine zweite Integration  
er die Elektronenenergie zu vermeiden, teilt man  
s Energiespektrum in verschiedene Bereiche und  
hnet mit mittleren Elektronenenergien und ent-  
prechenden Energie-Reichweiteformeln. Die An-  
gswinkelverteilung kann durch Einführung eines  
tleren Emissionswinkels  $\delta$  berücksichtigt werden.  
r Behandlung der Rückstreuung denkt man sich  
n Ort der Elektronenreflektion in die Grenzflächen  
legt. Man scheidet entsprechend dem Rückstreu-  
koeffizienten eine gewisse Zahl von Elektronen (mit  
r Energieverteilung des Elektronenflusses an dieser  
enzfläche) aus dem Energiefluß aus.

Folgende Vereinfachungen sind zur Anwendung  
s Verfahrens nötig:

- a) Die Schwächung der  $\gamma$ -Strahlen ist auf der  
recke der Elektronenreichweite vernachlässigbar.
- b) Die Elektronen bewegen sich in ihrer Primär-  
tung. Die Streuung der Elektronen wird nur als  
ückstreuung berücksichtigt.
- c) Die  $K$ -Strahlung wird nach einer Korrektur für  
e geringere Absorption wie die Elektronen behandelt.  
i der prozentuale Anteil der  $K$ -Strahlung am Ge-  
ntenergieumsatz sehr gering ist, bringt dies keinen  
hler.
- d) Die Wirkung der übrigen in den Folien ent-  
ehenden, sekundären Photonenstrahlung wird ver-  
hlässigt. Dies ist auch für die Compton-Streu-  
ahlung berechtigt, solange ihre freie Weglänge  $\mu D$   
oß gegen die Elektronenreichweite ist.

Das Verfahren eignet sich vor allem zur Berech-  
ung der relativen Energieabsorption bei verschiede-  
en Elektronenenergien (konstante Ordnungszahl) und  
ingt hier erstaunlich gute quantitative Ergebnisse.

Der Gang des Rechenverfahrens kann hier nicht  
im einzelnen beschrieben werden. Es sei auf die  
Originalarbeiten von GLOCKER verwiesen [21].

Unter Verwendung von Formel (5) und eines  
Reichweitegesetzes der Form  $R \sim E^{1/n}$  ergibt sich all-  
gemein die im Film abgegebene Elektronenenergie zu

$$E = E_0 \cos \delta \left\{ \tau_c \left( \frac{R_\tau}{n+1} - \frac{\left( R_\tau - \frac{b}{\cos \delta} \right)^{n+1}}{R_\tau^n (n+1)} \right) + \right. \\ \left. + \sigma_a \left( \frac{R_\sigma}{n+1} - \frac{\left( R_\sigma - \frac{b}{\cos \delta} \right)^{n+1}}{R_\sigma^n (n+1)} \right) \right\} \quad (9)$$

Dabei ist die Elektronenerzeugung im Film selbst  
vernachlässigt und die Filmdicke  $a$  in eine hinsicht-  
lich des Elektronenbremsvermögens der Filmumgebung  
äquivalente Dicke  $b$  umgerechnet.

Der 1. Term der Gleichung gibt die in  $a$  absorbierte  
Photoelektronenenergie, der 2. Term die Compton-  
Elektronenenergie.

Das Energiespektrum der Compton-Elektronen  
wurde numerisch berechnet. Durch Einteilung des  
Spektrums in mehrere Bereiche, mit zugeordneter  
mittlerer Energie  $\bar{E}_0$  und mittlerem Streuwinkel  $\delta$   
und Verwendung entsprechender Reichweiten  $R$ ,  
wurde der 2. Term von (9) ausgewertet. Die Ab-  
sorptionskoeffizienten wurden aus [22] gewonnen. Für  
die Photoelektronen und die höherenergetischen Com-  
pton-Elektronen wurde ein lineares Reichweitengesetz  
( $n=1$ ), für die niederenergetischen Compton-Elek-  
tronen  $n=2/3$ , angenommen.

Zur Rückstreuungskorrektur wird folgende Annahme  
getroffen: Die rückgestreuten Elektronenenergien für  
zwei verschiedene Materialien verhalten sich wie die  
Sättigungsrückstreuungskoeffizienten. Man multipliziert  
die Energieabsorptionskoeffizienten mit  $(1-p)$  und  
scheidet damit bei Ermittlung der relativen Energie-  
absorption  $E/E_{Al}$  die rückgestreute Elektronenenergie  
aus.

Die numerische Auswertung für  $Co^{60}$   $\gamma$ -Strahlen  
entsprechend Formel (9) und der Rückstreuorkorrektur  
zeigt die theoretische Kurve in Abb. 9  $E_Z/E_{Al}$  gegen  
 $\log(Z+1)$ . Die theoretischen Werte geben eine quali-  
tative Bestätigung der experimentellen Ergebnisse.  
Charakteristisch ist das Auftreten eines Minimums  
der wirksamen Elektronenintensität bei  $Z=40 \div 60$ ,  
das sich im vorliegenden Energiebereich unabhängig  
von der Foliendicke und vom Streustrahlenszusatz  
einstellt.

Die theoretische Kurve liegt jedoch allgemein zu  
tief. Das beruht neben den sonstigen groben Nähe-  
rungen auf der Verwendung von Sättigungsrückstreu-  
koeffizienten.  $p$  erfaßt nicht die beim Rückweg  
steckengebliebenen Elektronen. Da das Verhältnis  
der elastischen zur unelastischen Streuung von Elek-  
tronen aber mit  $Z$  geht, treten relativ weniger Elek-  
tronen von Aluminium als von Blei nach rückwärts  
aus; d.h.  $p_{Al}$  müßte relativ zu  $p_{Pb}$  erhöht werden.

#### D. 31. Dünne Bleiverstärkerfolien über und unter dem Film und Gang des Verstärker- faktors mit der Foliendicke

Für die Radiographie mit  $Co^{60}$  und  $Cs^{137}$  werden  
Bleiverstärkerfolien mit etwa  $120 \text{ mg/cm}^2$  ( $0,1 \text{ mm}$ )  
verwendet. Allgemein wird angenommen, daß die

Vorderfolien infolge zusätzlicher Photoelektronenerzeugung immer verstärkend wirken [28], [32], [33].

Wie man sieht (Abb. 10), tritt bei  $\text{Co}^{60}$ - $\gamma$ -Strahlen Schwächung und bei  $\text{Cs}^{137}$  Verstärkung gegenüber leichtatomiger Filmumgebung auf. Die Schwächung

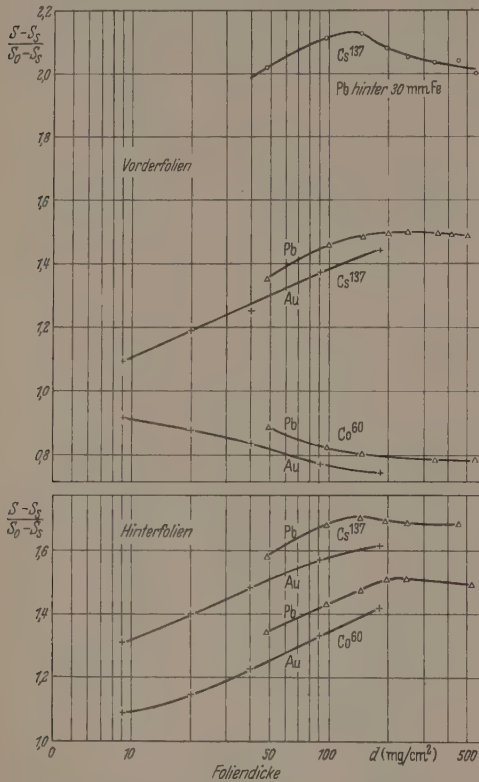


Abb. 10 Relative Schwärzung bei Änderung der Foliendicke für Blei- und Goldfolien mit 1 mm Al auf Gegenseite.  $S_0$  = Schwärzung für Al-ungebene Filme;  $S_s$  = Schleierschwärzung

rührt daher, daß die zusätzliche Photoelektronenerzeugung in den Folien durch die vermehrte Rückstreuung in den Folien überkompensiert wird, wie schon die Rechnung für dicke Folien ergeben hatte.

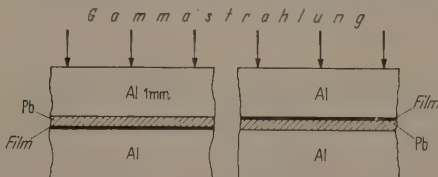


Abb. 11. Anordnung: Dünne Bleifolien über und unter dem Film

Man kann das Glockersche Rechenverfahren auch auf dünne Folien anwenden. Jedoch wird die Rückstreckorrektur fragwürdig, da die Foliendicke der Praxis etwa gerade der Rückdiffusionsdicke entspricht, aber kleiner als die Elektronenreichweite ist. Über den Gang des Rückstreckkoeffizienten unterhalb der Rückdiffusionsdicke liegen kaum Angaben vor. (Rückdiffusionsdicke = Foliendicke für die, bei parallel auffallenden Elektronen, gerade Sättigungsrückstreuung eintritt. Für volumenausgelöste Elektronen

hat sie im untersuchten Energiebereich etwa den gleichen Wert.)

Verringert man die Foliendicke von Werten über der Elektronenreichweite bis herunter zur Rückdiffusionsdicke, so tritt bei monochromatischen Primärquanten keine wesentliche Veränderung der Verstärkungswirkung sowohl bei Vorder- wie Rückfolien auf. Der geringe Abfall der Kurven zu hohen Foliendicken rührt von der direkten Schwächung der Strahlen durch die Bleifolien. Da der Streuphotonenfluß bei größeren Foliendicken relativ mehr als der Primärphotonenfluß geschwächt wird, zeigt sich bei Streustrahlenzusatz ein stärker ausgeprägtes Maximum. Unterschreiten die Pb-Folien die Rückdiffusionsdicken, so werden die aus dem Aluminium der Kassettendeckels (Abb. 11) stammenden Elektronen mit zunehmender geringerer Wahrscheinlichkeit an der Folie zurückgestreut. Mit schwindender Foliendicke nimmt aber auch die Zahl der wirksamen Photoelektronen ab: Bei  $\text{Co}^{60}$  wird also mehr und mehr der größere Vorwärtsfluß der Al-Elektronen wirksam, die schwächende Wirkung der Folien geht zurück. Bei  $\text{Cs}^{137}$  geht wegen der Verminderung der ausschlaggebenden Photoelektronen die Verstärkung zurück. Die Wirkung der Folie geht mit abnehmender Dichtestetig und monoton in die Wirkung der Vorschaltsschicht über. Analoge Überlegungen ergeben sinngemäß die Wirkung der Rückfolien.

Bei Doppelfolien setzt sich die erzeugte Gesamtschwärzung nicht etwa additiv aus den Beiträgen zusammen, wie sie für die Einzelfolien ermittelt wurden, sondern liegt stets höher, auch für die Folien (Abb. 14). Dies rührt daher, daß die Wirkung der Folie auf Grund ihres Rückstreuvermögens auch vom Elektronenfluß im gegenüberliegenden Material abhängt. Die Folien beeinflussen sich also wechselseitig in ihrer Wirkung.

#### D. 32. Abhängigkeit der Verstärkung durch dünne Bleifolien vom Einfallswinkel der $\gamma$ -Strahlen

Ein Zylinder (5 cm  $\varnothing$ ) aus 0,5 mm starker Zellphanfolie wurde auf einer Halbschale mit Filmstreifen belegt. Die Streifen waren zum Teil oben und unten mit 0,1 mm Bleifolie bedeckt und wurden wie in Abb. 12 mit der konvexen Seite zu einem ausgebleichten  $\text{Co}^{60}$ -Strahlenbündel angeordnet. Auf diese Weise wurde der Film unter kontinuierlich veränderndem Einfallswinkel exponiert. Die gemessene Variation der relativen Schwärzung  $S/S_0$  mit dem Einfallswinkel zeigt Abb. 12. Für die Vorder- wie für die Rückfolie ergibt sich eine Abnahme der Schwärzung mit dem Einfallswinkel. Der Wiederanstieg der Kurve für die Vorderfolie ist leicht erklärbar. Bei großem Einfallswinkel der Strahlung wird ein Teil der durch Emulsion gegangenen Elektronen in den benachbarten Teil der Emulsion von rückwärts wieder eingestreut. Dasselbe gilt für einen Teil der Sekundärphotonen (wahrscheinlichster Streuphotonenwinkel  $\approx 35^\circ$  in Primärphotonenrichtung).

Der Verlauf der Kurve wurde deshalb für großen Winkel extrapoliert. GREENING [7] hat ebenfalls die Abhängigkeit der Schwärzung vom Einfallswinkel gemessen, jedoch ohne Verstärkerfolien. Seine Ergebnisse für sehr harte Röntgenstrahlen 0,02 Å stimmen mit den hier für Vorderfolien gefundenen überein.



Die quantitative Übereinstimmung ist wohl nur zu erwarten. Der Abfall der Schwärzung zu großen Winkeln in die Vorderfolie rührt vermutlich daher, daß bei schrägem Photoneinfall die Elektronen im Mittel tiefer an der Eintrittsoberfläche diffus werden und damit die Chance zur Rückdiffusion größer wird. Dagegen läßt der cos-ähnliche Verlauf der Kurve für die Rückfolien darauf schließen, daß die Richtung des rückdiffundierenden Elektronenflusses durch den Film nähernd konstant zur Filmnormalen bleibt.

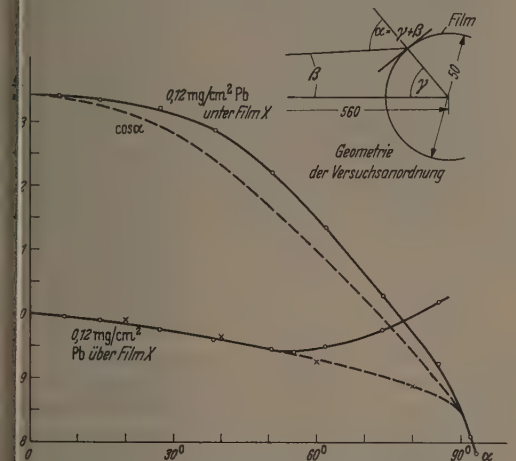


Abb. 12. Relative Schwärzung bei Änderung des Einfallswinkels der  $\gamma$ -Strahlen.  $x$  = experimentelle Ergebnisse von GREENING [7]

### D. 33. Gang des Verstärkungsfaktors bei Änderung der Strahlenenergie und bei Streustrahlenszusatz

GLOCKER [21] berechnet das Verhältnis der Energieabsorption in einer Meßschicht bei vorgeschalteten Blei- und Aluminiumschichten:  $\frac{E_{Pb}}{E_{Al}}$  in Abhängigkeit von der Strahlenenergie. Er vernachlässigt die Rückstreuung und die Änderung des relativen Bremsvermögens. Um mit den experimentellen Werten vergleichen zu können, wurde die Kurve unter Berücksichtigung dieser Dinge neu berechnet. Es wurde ein breiteres Reichweite-Energiegesetz angenommen und die Verhältnisse der Bremsvermögen nach Werten, die für den Polarisierungseffekt korrigiert sind, berechnet (Abb. 13). Das Rechenschema folgt dem in Abschnitt D. 222. Die Paarelektronen wurden mit  $= (1 - \frac{h\nu}{2mc^2}) \alpha$  in (5) berücksichtigt.

Die experimentellen Ergebnisse für das Verhältnis der photographisch bewerteten Intensitäten stimmen im Rahmen der groben Näherungen mit der Kurve überein. Es ist also schwächere Wirkung der Vorderfolien im Bereich zwischen 1 und 6 MeV zu erwarten, gegen steigt im Gebiet unter 1 MeV der Verstärkungsfaktor sehr rasch an. Jedoch ist der Kurvenverlauf bei den niederen Quantenenergien, wegen der zu groben Vereinfachungen, fraglich. Untersuchungen der Verstärkung durch Bleifolien (0,12 cm<sup>2</sup>) bei Streustrahlenszusatz durch Vorschalten von senabsorbieren verschiedener Dicke sind in Abb. 14 zusammengestellt. Sowohl bei Co<sup>60</sup> wie bei Cs<sup>137</sup> zeigt die Verstärkung durch die Oberfolien mit dem Streuzusatz rasch an. Bei Co<sup>60</sup> erreicht  $S/S_0$  bei etwa

20 mm Eisen Werte über 1. Es beginnt Verstärkung. Bei Cs<sup>137</sup> strebt die Verstärkung einem Grenzwert zu, was bei Co<sup>60</sup> wohl erst bei höheren Materialdicken der Fall sein wird. Die Verstärkung durch Rückfolien ist für Co<sup>60</sup> beinahe konstant, für Cs<sup>137</sup> zeigt sich ein geringerer Gang, ähnlich dem für die Vorderfolie. Die

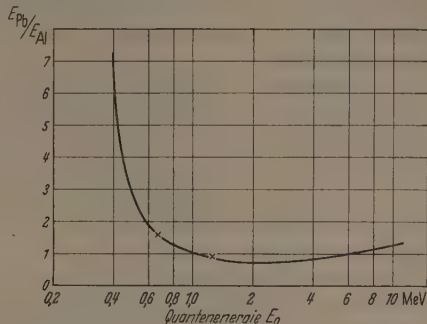


Abb. 13. Verhältnis der Energieabsorption im Film bei Blei- und Aluminiumvorschaltsschichten für verschiedene Quantenenergien  $E_0$ .  $x$  = experimentelle Ergebnisse

Werte für Doppelfolien wurden unabhängig gewonnen.

**Diskussion.** Bei Eisenabsorbieren findet im vorliegenden Energiebereich fast ausschließlich Compton-

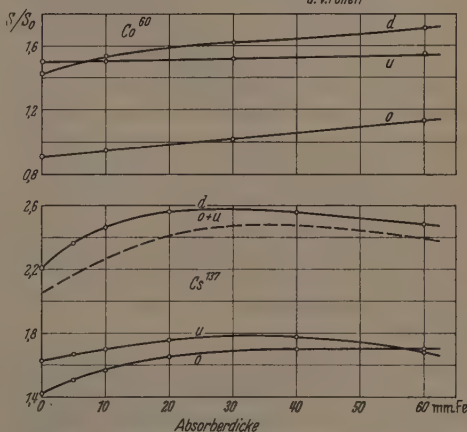
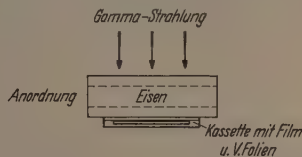


Abb. 14. Relative Schwärzung bei Streustrahlenszusatz aus verschiedenen Eisenstücken.  $o, u$  = 0,1 mm Bleifolien über, unter dem Film;  $d$  = Blei-Doppelfolie;  $S_0$  = Schwärzung für Al-umgebene Filme

Streuung statt. Der Photoabsorptionskoeffizient wird erst bei Photonenenergien von 0,15 MeV mit dem Streukoeffizient vergleichbar. Bei Co<sup>60</sup> (Cs<sup>137</sup>) ist die mittlere Streuphotonenenergie nach

$$\bar{E}_\sigma = 0,6 \cdot h\nu \cdot \frac{2h\nu/mc^2}{1 + 2h\nu/mc^2} \quad (11)$$

bei einmaliger Streuung etwa 0,62 (0,29) MeV, bei zweimaliger Streuung etwa 0,27 (0,09) MeV.

**Vorderfolien.** Aus dem Verlauf der Verstärkung mit der Strahlenenergie (Abb. 13) wird sofort ersichtlich, daß schon bei geringem Streustrahlenszusatz ein

erheblicher Verstärkungsanstieg stattfinden muß. Dazu sei erwähnt, daß die Halbwertsdicke (Wahrscheinlichkeit für Wechselwirkungsprozeß eines Photons mit der Materie  $= 1/2$ ) für  $\text{Co}^{60}$  ( $\text{Cs}^{137}$ )  $\gamma$ -Strahlen 22,3 (17,0) mm ist. Daß die bevorzugte Verstärkung der Streustrahlung nicht gleichmäßig mit aufgelegter Materialdicke weiter ansteigt, kann man mit sinngemäßer Anwendung folgender Prozesse auf den Verstärkungsmechanismus erklären:

a) Die wahrscheinlichste Energie der Streustrahlung strebt zu einem Wert, für den die Wirkungsquerschnitte für Photoabsorption und Compton-Prozeß vergleichbar werden. (Anstieg von  $\tau$  etwa mit  $\lambda^3$  bei 0,15 MeV und  $Z=26$ .) Ein Gleichgewichtszustand des Streuspektrums, der von weiterer Dickenzunahme unabhängig ist, wird bei  $\text{Co}^{60}$  erst bei wesentlich größeren Absorberdicken erreicht.

b) Die primäre Vorzugsrichtung der Compton- und Photoelektronen weicht mit abnehmender Photonenenergie zunehmend mehr von der Photonenrichtung

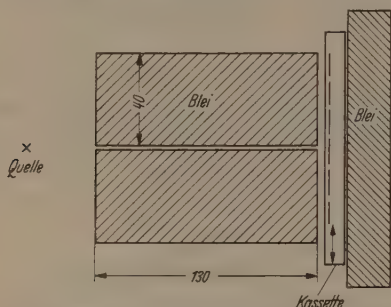


Abb. 15. Anordnung zur Untersuchung der Zeichenschärfe von Verstärkerfolien

ab. Die Schicht der Verstärkerfolie, aus der die Elektronen den Film noch erreichen können, wird immer dünner.

c) Der Rückdiffusionskoeffizient bleibt bis 10 keV herab unabhängig von der Elektronenenergie annähernd konstant.

d) Die praktische Reichweite der Sekundärelektronen für die unter a) eingeführte Begrenzung bleibt immer noch über der Filmdicke.

e) Die charakteristische Strahlung ist nicht mehr vernachlässigbar.

f) Die Vorzugsrichtung der Streuphotonen geht mit sinkender Energie zu größeren Winkeln. Ihre Energieabgabe in der Folie wird größer. Punkt a) mit c) weisen auf eine Verminderung des Verstärkungsanstiegs hin, während d) mit f) trotz gegenteiliger Wirkung vor allem wegen a) [gilt nicht für e)] nicht sehr stark zur Geltung kommen.

**Hinterfolien.** Mit der Aussage c) müßte sich für  $\text{Co}^{60}$  ein konstanter Verstärkungsfaktor ergeben, falls nur einmalige oder höchstens zweimalige Streuung stattfindet. Mit sinkender Primärenergie tritt die Photoabsorption in der Bleifolie mehr hervor, d.h. zu den rückgestreuten Elektronen kommt noch mehr und mehr charakteristische Strahlung hinzu. Der Anteil der  $K$ -Strahlung am Gesamtenergieumsatz wächst sehr schnell, wenn die Primärenergie mit der  $K$ -Schalenenergie vergleichbar wird. Dies erklärt den geringen Anstieg bei  $\text{Cs}^{137}$ . Der Wiederabfall ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß Punkt d) für

die rückdiffundierenden Elektronen nicht mehr erfüllt ist.  $p = \frac{\text{Zahl der rückgestreuten Elektronen}}{\text{Zahl der einfallenden Elektronen}}$  bleibt zwar bis 10 keV herunter konstant, jedoch steigt der mittlere relative Energieverlust der rückgestreuten Elektronen mit sinkender Primärenergie, vor allem für hohes  $Z$ .

**Zusammenfassend** kann gesagt werden: Die Vorderfolien verstärken bevorzugt die Streustrahlung, während die Rückfolien nur geringfügig mit der Strahlenenergie variiert. Dieses für die radiographische Praxis wichtige Ergebnis ist für  $\text{Cs}^{137}$  von größerer Bedeutung als für  $\text{Co}^{60}$ , denn es ist zu beachten, daß auch ein Teil der Streustrahlung je nach ihrer Divergenz bildzeichnend wirkt. Für die Praxis ist bei größeren Absorberdicken nur die Verwendung von Hinterfolien zu empfehlen, bei  $\text{Cs}^{137}$ , nur im Interesse hoher Verstärkung, eventuell die von Doppelfolien. Dies wird unterstützt durch die gute Zeichenschärfe der Rückfolien. Dasselbe gilt übrigens für Leuchtfolien, wurde aber auch hier noch nicht erkannt.

#### D. 4. Die Zeichenschärfe von Verstärkerfolien

##### D. 41. Allgemeines

Die Zeichenschärfe auf Radiogrammen wird wesentlich durch die Verstärkerfolien beeinflusst. Im allgemeinen wird angenommen, daß die Schwermetallfolien schärfer zeichnen als die Leuchtfolien. Die Leuchtfolien bestehen meist aus aktiviertem  $\text{ZnS}$  oder  $\text{CaWO}_4$ , das feinkörnig auf eine Unterlage aus Papier oder flexiblem Gewebe aufgetragen ist. Ihre Zeichenschärfe wird durch die Körnigkeit des Leuchtpulvers und durch die Dicke der fluoreszierenden Schicht bestimmt [34]. Mit Rücksicht auf die große Bedeutung der Folien werden von der Industrie Anstrengungen gemacht, ihre Qualität zu erhöhen. Die Korngröße liegt z. Zt. bei 2 bis  $50 \mu$  und rückt damit in die Größenordnung der Bromsilberkörner in der Emulsion. Um einer weiteren (durchaus notwendigen) Verbesserung der Röntgenemulsionen im Sinn von Feinkörnigkeit bei gleicher Empfindlichkeit folgen zu können, bieten sich folgende Möglichkeiten:

a) Verwendung von Schwermetallfolien.

b) Entwicklung von kornlosen, glasartigen Folien aus anorganischen Leuchtstoffen [35]. Die Verstärkung läßt noch zu wünschen übrig.

c) Verwendung von kornlosen, plastischen organischen Szintillatoren in Folienform. Orientierende Versuche mit Terphenyl in Polystyrol gaben im 7. Gebiet unbefriedigende Ergebnisse ( $f=1,3$  für Doppelfolien).

##### D. 42. Experimentelle Bestimmung der Zeichenschärfe von Verstärkerfolien

Um die Zeichenschärfe von Folien experimentell zu vergleichen, wurde folgendes Verfahren angewandt (Abb. 15).

Durch zwei sorgfältig plangedrehte Bleiplatten wird ein etwa 1 mm ( $\text{Co}^{60}$ ) bzw. 0,22 mm ( $\text{Cs}^{137}$ ) breiter Strahlenbündel spaltartig ausgeblendet. Die Filmkassette ist senkrecht zur Längsachse des Spaltverschiebbar, und der Film ist gleichsinnig zum Bleispalt mit schmalen Verstärkerkombinationen belegt. Auf dem Film erscheinen also parallele Schwärzungslinien, die alle in gleicher Höhe ausphotometrier



orden können, so daß Unregelmäßigkeiten in der Halbwertsbreite nicht eingehen. Die Belichtungszeiten für die einzelnen Kombinationen wurden so gewählt, daß die Gesamtschwärzungen (für großes Feld, nicht nur das Maximum hinter dem Spalt) gleich waren.

Die Schwärzungslinien wurden ausphotometriert und die Halbwertsbreiten der 6fach bzw. 12fach verbreitert registrierten Durchlässigkeitskurven als Maß für die Unschärfe genommen (Abb. 16). Durch die Halbwertsbreite wird ein einsteiger Abstand definiert, den zwei Details mindestens haben müssen, damit sie, trotz Überlagerung der Unschärfezonen, durch einen zwischen ihnen liegenden Helligkeitsunterschied getrennt werden. Zu beachten ist, daß bei der praktischen Auswertung von Radiogrammen einiger starke Kontraste auftreten und Beachtung, Adaptationszustand und physiologischer Kontrast neben der Zeichenschärfe die Fehlererkennbarkeit beeinflussen. Bei den üblichen Fehlertesten mit Lochplatten, Draht- und Nutenstegen gehen diese Gegebenheiten in unkontrollierbarer Weise ein und gestatten keine objektive Bestimmung der Zeichenschärfe ohne Verstärkerfolien.

Die Ergebnisse der Untersuchungen sind in Tabelle 5 zusammengefaßt. Es sind die absoluten Halbwertsbreiten in mm angegeben. Die Wahl verschiedener Spaltbreiten bei  $\text{Co}^{60}$  und  $\text{Cs}^{137}$  war aus Gründen der Genauigkeit notwendig. Die Ergebnisse für verschiedene Quellen sind deshalb nur angenähert vergleichbar.

Die Versuchsfehler (zufällige Kornballungen am Rand der Schwärzungslinien, Eberhard-Effekt, photometrische Ausmessung, Gang des Films beim Entwickeln, usw.) liegen etwa bei  $\pm 5\%$  der Halbwertsbreite.

Zusammenfassend ergibt sich:

1. Die absolute Unschärfe (definiert als gemessene Halbwertsbreite minus Spaltbreite) beträgt für Aluminium-umgebene Filme bei  $\text{Co}^{60}$  etwa 0,6 mm, bei  $\text{Cs}^{137}$  0,27 mm.
2. Die Bleifolien über dem Film verbessern die Zeichenschärfe um maximal etwa 0,18 bzw. 0,08 mm, nur wenig abhängig von ihrer Dicke.
3. Alle Verstärkerfolien unter dem Film verschlechtern die Zeichenschärfe ziemlich gleichartig, aber nur um einen unerwartet kleinen Betrag.
4. Leuchtfolien über dem Film sind schlechter als Bleifolien. Unter dem Film sind sie gleichwertig.
5. Die folienlosen Aufnahmen, also 1 mm Aluminiumdeckel über dem Film, sind relativ schlecht.

Daraus resultiert, daß Aluminiumkassetten, sowie die in Amerika üblichen Filmhalter aus Pappe für folienlose Aufnahmen (no-screen Filme), nicht angebracht

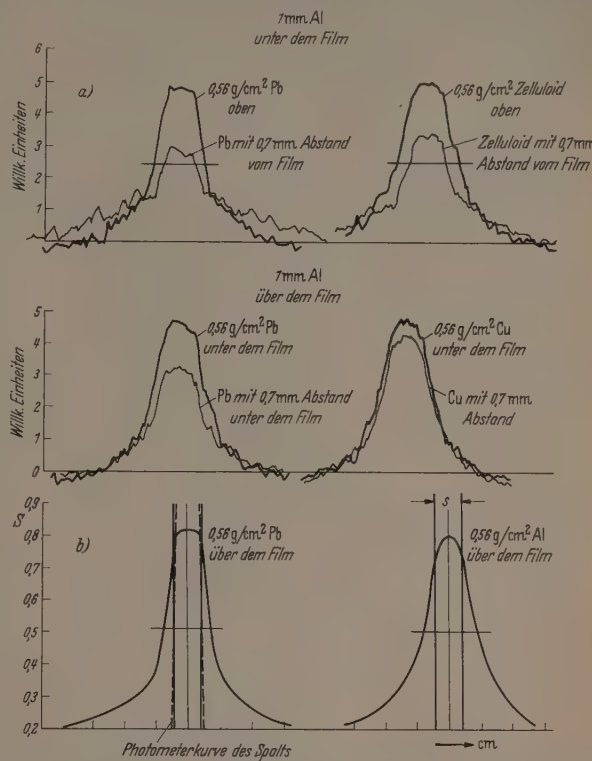


Abb. 16 a u. b. a Photometerkurven der Schwärzungslinien:  $\text{Cs}^{137}$ , 0,22 mm Spalt; Abszisse 40:1 vergr. b Photometerkurven in Schwärzungskurven umgezeichnet

sind. Das äußert sich auch bei Leuchtfolien, wenn sie auf starker Pappe aufgetragen sind (Folie P). Als Grundlage wäre etwa Blei-Antimon-Blech zu emp-

Tabelle 5. Unschärfen für verschiedene Verstärkerfolien in mm (Halbwertsbreite der Photometerkurven minus Spaltbreite)

Co <sup>60</sup> -Spalt 1 mm		Bleifolien [mg cm <sup>2</sup> ]				Leuchtfolien		Al
		560	340	180	45	L <sub>D</sub>	L <sub>P</sub>	560 mg cm <sup>2</sup>
Folien über dem Film	} S = 0,80	0,46	0,435	0,444	0,46	0,535	0,735	0,616
1 mm Al unter dem Film								
Folien unter dem Film	} S = 0,80	0,468	0,51	0,50	0,50	0,45	0,48	0,44
180mg/cm <sup>2</sup> Blei über dem Film								
Cs <sup>137</sup> -Spalt 0,22 mm		560 mg/cm <sup>2</sup>				L <sub>D</sub>	L <sub>P</sub>	
		Pb	Sn	Al	Zellul.			
Folien über dem Film	} S = 0,83	0,202	0,208	0,270	0,282	0,21	0,24	
1 mm Al unter dem Film								
Folien unter dem Film	} S = 0,83	0,265	0,260	0,280	0,237	—	0,297	
1 mm Al unter dem Film								

fehlen, zumal sich dadurch eine zusätzliche Verstärkung ergibt (Abb. 2).

Es ist zu beachten, daß das Auflösungsvermögen des menschlichen Auges 1' beträgt. Das entspricht bei 30 cm Betrachtungsabstand etwa 0,1 mm. Variationen der Zeichenschärfe unterhalb 0,1 mm werden

deshalb bei subjektiver Betrachtung keinen Einfluß auf die Detailerkennbarkeit haben.

In der Praxis haben Verbesserungen der Zeichenschärfe um die angegebenen Werte nur dann Sinn, wenn nicht durch die Geometrie der Schattenprojektion größere Randunschärfen entstehen [36].

#### D. 43. Diskussion

Bei der angewandten Methode können einen Beitrag zu der festgestellten Gesamtunschärfe leisten:

a) Die „innere Unschärfe“ des Films; das ist der Beitrag zur Gesamtunschärfe, der durch Energie-transport in der Emulsion selbst entsteht, sei es durch Streuung der auftretenden Elektronen im Film oder durch die im Film ausgelösten Elektronen. In der Literatur der Röntgenographie wird die unvermeidliche Gesamtunschärfe durch Elektronentransport auch als innere Unschärfe bezeichnet. Zur nachfolgenden Diskussion wird dieser Begriff nur auf den Film selbst angewandt.

b) Streuung der Sekundärelektronen in den Verstärkerfolien (für Leuchtfolien auch Streurefektion des Lichts an den Körnern des Leuchtpulvers): „äußere“ Unschärfe.

Zu a). Die innere Unschärfe der Filme, kann im MeV-Gebiet nicht korrekt gemessen werden, da die Sekundärelektronen immer im umgebenden Medium Streuung erlitten haben. (Es sei denn im Vakuum und unter Anwendung von entsprechenden Magnetfeldern.)

Man kann von vornherein erwarten, daß die innere Unschärfe des Films sehr klein gegen die Gesamtunschärfe ist. Nach D. 221 ist der Schwärzungsbeitrag und damit auch der Unschärfebeitrag der im Film entstehenden Elektronen sehr gering. Für Elektronen, die in der Filmumgebung entstanden sind, ist der Weg, den sie außerhalb der Emulsion zurückgelegt haben, im Mittel sehr groß gegen die Dicke des Films, so daß die Streuung im Film für die von außen auftretenden Elektronen nur eine relativ kleine Vermehrung ihrer bereits vorhandenen „äußeren“ Unschärfe verursacht.

Zur Untersuchung wurden schmale Goldstreifen (2 mm breit, 20 mg/cm<sup>2</sup>) sowohl auf wie unter dem Film unmittelbar auf die Emulsion gelegt. Diese Streifen verursachen auf Grund ihrer anderen Streuung, Erzeugung und Bremsung von Elektronen eine starke Störung des homogenen Elektronenflusses aus der Aluminiumumgebung des Films (Kassettendeckel und -boden). Die Streifen bilden sich sozusagen vor einem homogenen Untergrund selbst ab. Die innere Unschärfe muß sich dann ungefähr aus der Veränderung der Bildbreite gegen die wahre Streifenbreite ergeben.

Das Bild des Streifens wurde mit 40facher Vergrößerung ausphotometriert. Dabei wurden die Gold-

streifen selbst neben dem Bild auf dem gleichen Untergrund mitphotometriert. Beim Vergleich der Registrierkurven konnte keine innere Unschärfe über 0,05 mm festgestellt werden.

Da die innere Unschärfe des Films tatsächlich klein gegen die unvermeidliche äußere Unschärfe ist, können die Filme für  $\gamma$ -Radiographie dicker begossen und damit empfindlicher werden, ohne einen Verlust an Gesamtzeichenschärfe befürchten zu müssen. Durch Verbesserung der Filmempfindlichkeit würde einem Hauptanliegen der  $\gamma$ -Radiographie Rechnung getragen.

Zu b). Aus dem unter a) Gesagten folgt, daß für die Unschärfe bei Metallverstärkern lediglich die Streuung bzw. die Rückdiffusion von Sekundärelektronen in den Ober- bzw. Unterfolien maßgebend ist.

Der Beitrag der K-Strahlung zur Unschärfe ist gering, entsprechend ihrem geringen Anteil am Gesamtenergieumsatz im betrachteten Energiebereich (s. D. 221). In niederen Energiebereichen wird man ihren Einfluß eher unter den kontraständernden



Abb. 17. Koordinatenabweichung  $k$  für Sekundärelektronen

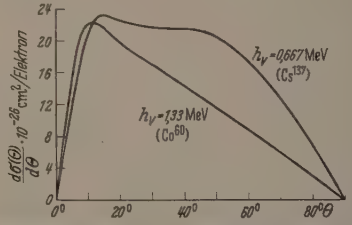


Abb. 18. Differentieller Wirkungsquerschnitt für die Zahl der Compton-Elektronen, die pro Einheitswinkel in die Richtung  $\theta$  gestreut werden in Einheiten von  $10^{-28}$  cm<sup>2</sup>/Elektron

Gegebenheiten zu behandeln haben. Die Sekundärelektronen werden in den Folien mit einer primären Winkelverteilung und Anfangsenergie ausgelöst, wie sie durch die Gesetzmäßigkeiten der Compton-Streuung bzw. der Photoabsorption gegeben sind. Die Elektronen erleiden dann, je nach dem Abstand des Entstehungsorts von der Filmoberfläche, bis zum Übergang in den Film Einfach-, Mehrfach- oder Vielfachstreuung, bis sie nach Durchlaufen der Diffusionsdicke schließlich diffus werden. Eine umfassende mathematische Behandlung des Elektronendurchgangs an Grenzflächen ist noch nicht gelungen.

Im Rahmen von groben Abschätzungen lassen sich jedoch bereits einige praktisch wichtige Ergebnisse gewinnen:

1) Die von der Primärstrahlrichtung abweichend Anfangsrichtung der Elektronen trägt zur Unschärfe bei, wesentlich aber nur für leichtatomiges Material. Um zu dieser Aussage zu gelangen, nimmt man scharf lokalisierten punktförmigen Eintritt der  $\gamma$ -Strahlen an und bestimmt die mittlere Koordinatenabweichung  $k$ , die die Sekundärelektronen nach Durchlaufen der Diffusionsdicke  $x_d$  haben (Abb. 17).  $x_d$  gibt die Strecke an, nach deren Durchlaufen die Elektronen die „Erinnerung“ an ihre Primärstrahlrichtung verloren haben und ist gegeben durch [37]:

$$x_d = \frac{E_0 + 1}{E_0 + 7,5} \cdot R_0 \quad (1)$$

$R_0$  ist die Reichweite der Teilchen mit der Energie  $E_0$  im betreffenden Material.



Alle Compton-Elektronen, deren Anfangsrichtung den Winkel  $\theta$  mit der Photonenrichtung einschließt, den nach

$$\tau_{el} = h\nu \cdot \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha + (1 + \alpha)^2 \tan^2 \theta} \quad \alpha = \frac{h\nu}{mc^2} \quad (12)$$

e bestimmte Energie, der nach (11) eine Diffusionske und damit eine Koordinatenabweichung zugeordnet ist.  $R_0$  kann dazu aus Tabellen oder Kurven entnommen werden (z. B. [38]). Unter Berücksichtigung der relativen Häufigkeit der Elektronenstreuwinkel (Abb. 18, nach einer modifizierten Klein-Nishina-Formel), kann man schließlich eine Häufigkeitsverteilung der Koordinatenabweichungen aufstellen. Verfährt man sinngemäß ähnlich mit den Photoelektronen und berücksichtigt deren Anteil an der Gesamtelektronenenergieerzeugung, so kann man folgende abschätzen: Die mittlere Koordinatenabweichung der Elektronen nach Durchlaufen des  $x_d$ -Bereiches ist für  $\text{Co}^{60}$ -Primärstrahlung bei Al etwa  $1/5$ , bei Pb etwa  $1/10$  der experimentell bestimmten Unschärfe. Es ist allerdings zu beachten, daß die berechnete mittlere Koordinatenabweichung nur sehr geringfügig mit der gemessenen Unschärfe verglichen werden kann.  $k$  gibt im Prinzip durch die Tiefe der betrachteten Schicht hindurch nur das Volumen, von dem die Diffusion der Elektronen erfolgt. Bei Pb rührt die Unschärfe vorwiegend von der Diffusion der Elektronen mit wesentlich größerem mittlerem Streuwinkel (s. auch D. 44). Nur auf Grund von Weitwinkeln (ähnlich wie oben), aber mit kleinerer, statt  $x_d$ , mit der Annahme eines geradlinigen Elektronenweges über die ganze Reichweite, ergeben sich für Al ungefähr die gemessenen Unschärfen, für Pb aber wesentlich geringere Unschärfen. Da mit zunehmender Quantenenergie die Vorwärtsemission der Compton- und Photoelektronen mehr bevorzugt wird, ist bei leichtatomigem Material eine Verbesserung der Zeichenschärfe, zumindest relativ zur Elektronenreichweite, zu erwarten. Bei abnehmender Quantenenergie werden die Unschärfen durch die Elektronenreichweite rasch kleiner (s. Ergebnisse für  $\text{Cs}^{137}$ ). Unter Verwendung der Zwischenergebnisse der obigen Rechnungen läßt sich noch aussagen:

2) Den überwiegenden Anteil an der Unschärfe in leichtatomigem Material haben Elektronen, die aus den äußeren Schichten der Verstärkerfolien stammen, etwa aus einer Tiefe von  $2/3$  der maximalen Elektronenreichweite. Dies läßt sich aus einfachen geometrischen Betrachtungen [analog zu denen in Abschnitt 1) unter Verwendung der Reichweite  $R$  statt  $x_d$ ] ableiten.

3) In Blei sind die Photoelektronen sowohl auf Grund ihrer Anfangswinkelverteilung wie auch auf Grund ihrer größeren Reichweite (für 1,25 MeV: Photoel.  $\approx 480 \text{ mg/cm}^2$ ,  $\bar{R}_{\text{Comptel.}} \approx 250 \text{ mg/cm}^2$ ), überlegend für die Unschärfe verantwortlich. Der Photoabsorptionskoeffizient variiert mit  $Z^{4,5}$  bei 2 MeV. Da auch der mittlere Streuwinkel mit  $Z$  wächst, läßt sich mit Folien niedriger Ordnungszahl und möglichst hoher Dichte etwas bessere Zeichenschärfe erzielen; allerdings auf Kosten der Verstärkung.

Vorgeschlagen wird: Tantal  $Z = 73$   $\rho = 16 \text{ g/cm}^3$   
Silber  $Z = 57$   $\rho = 10$  „  
dagegen Blei  $Z = 82$   $\rho = 11,3$  „

(Tantal ist nach entsprechender Behandlung duktil und walzbar, oxidiert nicht und ist nicht so anfällig gegen mechanische Beschädigung.)

In diese Richtung weist der experimentelle Befund an Zinn ( $Z = 50$ ,  $\rho = 7,3 \text{ g/cm}^3$ ), das bei Versuchen mit  $\text{Cs}^{137}$  gleiche Zeichenschärfe wie Blei hat.

Auffallend erscheint die geringe Unschärfemehrung durch die Unterfolien, trotzdem diese wesentlich verstärkend wirken. Dies kann nur durch eine Winkelverteilung der rückdiffundierenden Elektronen gedeutet werden, die Winkel um  $90^\circ$  zur Folienoberfläche (senkrechter Austritt) eindeutig bevorzugt. Diese Überlegung gab Anlaß zu weiteren Versuchen.

#### D. 44. Untersuchungen zur Winkelverteilung von rückdiffundierenden Elektronen

Die Folien wurden abwechselnd auf und unter den Film in 0,7 mm Abstand vom Film angebracht. Da die Elektronen beim Übergang vom festen Medium in Luft mit der Winkelverteilung, die sie beim Austritt aus dem Metall hatten, praktisch ungestört in Luft weiterlaufen, gestatten die Schwärzungsbilder Aussagen über die Winkelverteilung an der Verstärkeroberfläche. (Der Luftabstand wurde aus Intensitätsgründen so klein gewählt.) Die photometrisch wie in D 42 gewonnenen Registrierkurven (Abb. 16), bei denen jeweils die Kurve für Kontakt zwischen Folie und Film und die Kurve für die gleiche Kombination mit 0,7 mm Luftabstand ( $\text{Cs}^{137}$ ) übereinander gezeichnet sind, ergeben:

Für Bleifolien, mit Abstand über dem Film, eine deutliche Anhebung der Flügel der Kurve und eine Verringerung des Maximums, entsprechend der Winkelverteilung mit größerem mittlerem Streuwinkel. Bei leichtem Kunststoff ist die Anhebung der Flügel und Verringerung des Maximums relativ kleiner als bei Blei.

Dagegen zeigt sich bei den entsprechenden Kurven der Rückfolien keine Anhebung der Flügel, lediglich das Maximum liegt tiefer. Diese Verringerung des Maximums rührt wahrscheinlich daher, daß Elektronen, die diffus vorwärts aus dem Film austreten, nun die rückstreuende Folie in breiter Verteilung erreichen und nach der Rückstreuung nur den Untergrund etwas anheben. Aus der Tatsache, daß die Kurven kaum verschmiert sind, kann aber auf eine eindeutige Bevorzugung steiler Austrittswinkel bei Bleirückfolien geschlossen werden.

#### Diskussion

Die Vielfachstreuung der eindringenden Sekundärelektronen muß bis zu großen Winkeln fortgeschritten sein, damit Rückstreuung eintreten kann. Die dazu nötige Bahnlänge in Atom/cm<sup>2</sup> ist nach BOTHE [39] ungefähr proportional  $E_0^2/Z^2$  (elastische Streuung am Coulomb-Feld ohne Abschirmung). Außerdem ist das Verhältnis der Querschnitte für elastische und unelastische Streuung proportional  $Z$ . Demnach werden die Elektronen im Material mit hohem  $Z$  nach kürzerer Weglänge und nach kleineren Energieverlusten diffus als in leichtatomigem Material. Dieses Verhalten läßt Schlüsse einerseits auf die Intensität der Rückstreuung und auch auf die Winkelverteilung der rückgestreuten Elektronen in Abhängigkeit von  $Z$  des Streuers zu.

Bei schweratomigen Absorbern (Blei) erreichen praktisch nur diffuse Elektronen die Oberfläche. Die Einzelstreuung über große Winkel liefert nur einen kleinen Beitrag zur Rückstreuung. Die Winkelverteilung von diffusen Teilchen, die aus einer Oberfläche austreten, folgt aber einem cos-Gesetz (Winkel mit Normale). Anders bei leichtem Material: Hier haben die in tieferen Schichten diffus werdenden Elektronen nur geringe Chancen, die rückwärtige Oberfläche zu erreichen und nur unter hohen Energieverlusten. Das heißt, der Beitrag der Einzelstreuung um große Winkel, relativ zur Gesamtstreuung, wird größer (bei wesentlich kleinerer absoluter Intensität im Vergleich zu Blei). Für die Elektronen, die durch Einzelstreuung um große Winkel zurückgestreut wurden, ist aber keine cos-Verteilung der Austrittswinkel zu erwarten (cos-Verteilung gilt für diffundierende Teilchen mit vielen statistischen Ablenkungen). Man wird im Gegenteil eher eine Bevorzugung flacher Winkel zur Folienoberfläche erwarten. Diese Vermutung konnte wegen der geringen Rückstreuintensität bei Aluminium photographisch nicht experimentell nachgeprüft werden.

## E. Der Kontrast im Radiogramm

### E.1. Definitionen

Der Kontrast in zwei Details auf dem Film ist nach Schwärzungsmessungen gegeben durch:

$$Q = S_1 - S_2 = \log I'_1 / I'_2;$$

wobei  $I'_1$  und  $I'_2$  die Intensitäten des durchgehenden, sichtbaren Lichts sind.

Hier soll unter den kontraständernden Gegebenheiten besonders der Einfluß der Streustrahlung untersucht werden.

Der maximal erzielbare Kontrast ist nach Formel (8)

$$Q_{\max} = \Delta S = \gamma \cdot \Delta \log I = \gamma \log \frac{I_1}{I_2} = \gamma \cdot 0,43 \mu \Delta d.$$

$I_1$  und  $I_2$ : Intensitäten der auftreffenden, schwärzenden primären  $\gamma$ -Strahlen entsprechend der kleinen Dickendifferenz  $\Delta d$ ,  $\gamma$  = Gradation des Films.

Bei Streustrahlenzusatz wird der Kontrast:

$$Q = \Delta S' = \gamma \cdot \log \frac{I_1 + I_s}{I_2 + I_s}, \quad (13)$$

$I_s$  = Intensität der Streustrahlung.

also  $Q < Q_{\max}$ : Der Kontrast wird bei Zusatz von Streustrahlung geringer.

Es ist 
$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{\log K}{0,43 \mu \Delta d}, \quad \text{wobei} \quad K = \frac{I_1 + I_s}{I_2 + I_s}.$$

In der amerikanischen Literatur wird zur Beschreibung der multiplen Streuung der sog. build up Faktor  $B$  verwandt. Er gibt für jedes spezifische  $\gamma$ -Dosimeter das Verhältnis der Anzeige aller wirksamen Strahlung ( $I_{\text{primär}} + I_{\text{stren}}$ ) zur idealen Anzeige an (nur primäre Strahlung). Zur Formulierung wird der kleinste vorkommende Schwächungskoeffizient (totaler Absorptionskoeffizient)  $\mu_0$  verwandt.

Also:

$$K = B e^{-\mu_0 \Delta d},$$

so daß:

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{\log B - 0,43 \mu_0 \Delta d}{0,43 \mu \Delta d}.$$

In einer neueren Arbeit von SCHITTENHELM [41] wird die Änderung des Kontrasts durch Streustrahlenzusatz und sein Einfluß auf die Fehlererkennbarkeit rechnerisch untersucht. (Mit Literaturangaben; siehe auch [42].)

### E.2. Multiple Streuung von $\gamma$ -Strahlen

Die theoretische Behandlung der multiplen  $\gamma$ -Streuung erfordert großen rechnerischen Aufwand. Ein Überblick über die erfolgreichen Methoden und die Art der Behandlung gibt BLIZARD [43]. Aus den allgemeinen Schwächungsgesetzen läßt sich folgendes ableiten: Für Eisenabsorber tritt im vorliegenden Energiebereich zunächst fast nur Compton-Streuung auf (für 1,25 MeV: Photo-Absorptionskoeffizient  $\tau = 0,002 \text{ cm}^{-1}$ ;  $\sigma = 0,417 \text{ cm}^{-1}$ ). Der mittlere Energieverlust nimmt jedoch im Verlauf der mehrfachen Compton-Degradationen ab. Deswegen ergibt sich im Spektrum der Sekundärphotonen eine Anhäufung bei niedrigen Energien. Dieses Maximum im Sekundärphotonenspektrum tritt kurz vor dem Energiebereich auf, wo die Wahrscheinlichkeit für die Photoabsorption sehr steil ansteigt. Dies gilt für Compton-Streuung und große Dicken (etwa 10–15  $\mu_0 d$ ). Die Form des Gleichgewichtsspektrums ändert sich dann bei weiterer Dickenzunahme nicht mehr. Für Material mit hohem  $Z$  liegen die Verhältnisse anders, da hier die Photoabsorption bis zum minimalen Schwächungskoeffizienten Einfluß hat. Die Winkelverteilung der Sekundärphotonen dürfte etwa eine Gauß-Verteilung und ab großen Dicken auch unabhängig von der Absorberdicke sein.

### E.3. Beeinflussung des Streustrahlenzusatzes

Die Intensität der Streustrahlen kann verändert werden:

a) Durch Veränderung des Abstandes Absorber–Film. Es wird bei der Vergrößerung des Abstandes ein Teil der ungerichteten Streustrahlung aus dem bildgebenden Bündel herausgestreut. Diese Maßnahme verringert sehr schnell die Zeichenschärfe, wenn nicht der Quelle–Absorber-Abstand im gleichen Verhältnis vergrößert wird.

b) Durch Ausblenden enger Strahlenbündel, also Durchstrahlen kleiner Volumina.

c) Durch Anbringen von Schwermetallfiltern zwischen Objekt und Film.

d) Durch Rasterblenden.

### E.31. Streustrahlenfilter

Die Streustrahlenfilter bestehen meist aus Blei in homogener Schicht. Ihre Wirksamkeit beruht darauf, daß sie die weichere Streustrahlung stärker absorbieren als die Primärstrahlung. Zusätzlich haben die Streustrahlen einen längeren Weg durch das Filter, da sie unter einem Winkel ( $\alpha$ ) auf das Filter treffen. Die Wirksamkeit der Filter ist also proportional

$$\sim e^{(\mu_S \cos \alpha - \mu_P) d}.$$

$\mu_S$  = Schwächungskoeffizient für die primären Strahlen,

$\mu_P$  = für die sekundären Strahlen.

Nimmt man bei 40 mm Eisen etwa einmalige Compton-Streuung an und eine mittlere Streupho-



nenenergie von 0,64 MeV, so kann man nach Durchgang durch ein 4 mm dickes Bleifilter eine Verbesserung des Verhältnisses der primären zur Streustrahlung  $I_{\text{pr}}/I_{\text{streu}}$  um einen Faktor 1,35 erwarten (wobei ein mittlerer Winkel der Streuphotonen von  $30^\circ$  angenommen wurde). Diese Überlegungen sind natürlich im Unkenntnis der spektralen Verteilung und Winkelverteilung der Streuphotonen recht spekulativ und unsicher und bedürfen experimenteller Klärung.

### E. 32. Streustrahlenblenden (Bucky-Blenden)

Die Bucky-Blenden bestehen aus Bleistreifen, die durch ein strahlendurchlässigeres Material getrennt sind. Die Bleistreifen müssen parallel zu den Primärstrahlen liegen (Abb. 19). Sie sind also nur bei sehr großem Quelle—Film-Abstand unter sich parallel; im allgemeinen müssen die Kanten der Streifen auf die punktförmige Quelle hinweisen. Nur dann hat die Blende für die Primärstrahlung maximale Durchlässigkeit, während die ungerichtete Streustrahlung wesentliche Absorption erleidet. Für die Wirkung der Blende ist das Verhältnis Streifenabstand zu Höhe  $=a/h$  maßgebend (Schachtverhältnis, Abb. 20). Bei der Verwendung von Blenden ist auf die Veränderung der Randunschärfe zu achten.

Die Randunschärfe für Fehler senkrecht unter der Quelle ist:

$$U_R = \frac{a}{b} \cdot D \quad (\text{Abb. 21}),$$

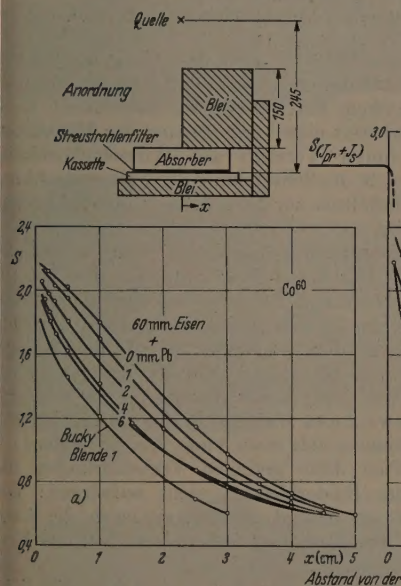


Abb. 22 a u. b. a Streustrahlenfilterung durch Bleischichten. b Schwärzung durch Streustrahlung aus verschiedenen Eisendicken hinter einer abschattenden Kante.  $S_{I_{\text{pr}}} + I_{\text{str}}$  = Schwärzung durch Gesamtstrahlung,  $S_{I_{\text{str}}}$  = Schwärzung durch Streustrahlung

wobei  $D$  = Quelldurchmesser,  
 $b$  = Quelle—Fehlerabstand,  
 $a$  = Fehler—Filmabstand.

Für die gegenwärtigen Verhältnisse ( $a + b = 35$  cm,  $D = 0,2$  cm und  $a = 5$  cm; Fehler an der Oberfläche eines Absorbers) wird  $U_R = 0,3$  mm. Bringt man eine 5 cm hohe Bucky-Blende ein, so wird  $U_R = 0,5$  mm

(durch Änderung von  $b/a$ ). Um die gleiche Randunschärfe zu erhalten, muß der Quelle—Film-Abstand auf etwa 50 cm erhöht werden, was bereits doppelter Belichtungszeit entspricht.

Unter Anwendung dieser Überlegungen wurde für  $\text{Co}^{60}$  ( $\text{Cs}^{137}$ )  $h = 2$  cm (1,5 cm) und  $a = 0,55$  mm (0,5 mm) bemessen. Die Bleistreifendicke wurde so gewählt, daß die Gesamtschwächung durch die Blende etwa der durch 3 bis 4 mm Blei entsprach (Verlängerung der Belichtungszeit um 25 bis 30 %). Die Gesamtintensität der durchgehenden Primärstrahlung läßt sich berechnen aus:

$$I = I_0 \left( \frac{a}{a+d} e^{-\mu_1 h} + \frac{d}{a+d} e^{-\mu_2 h} \right) \quad (14)$$

wobei  $d$  = Bleistreifen-  
dicke,  $\mu_1$  = Schwächungs-

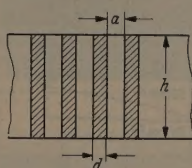


Abb. 20. Rasterblende (Detail),  $h$  Schachthöhe,  $d$  Bleistreifendicke,  $a$  Schachtbreite

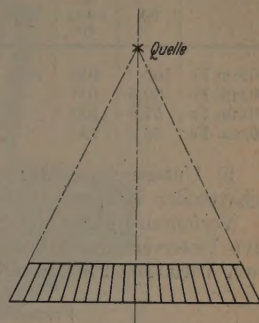


Abb. 19. Rasterblende (Schema)

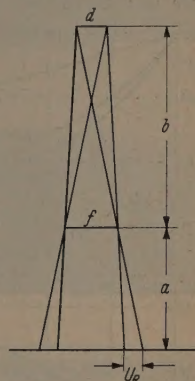


Abb. 21. Randunschärfe  $U_R$  für Fehler  $f$ , senkrecht unter der Strahlenquelle (nutzbarer Durchmesser  $d$ )

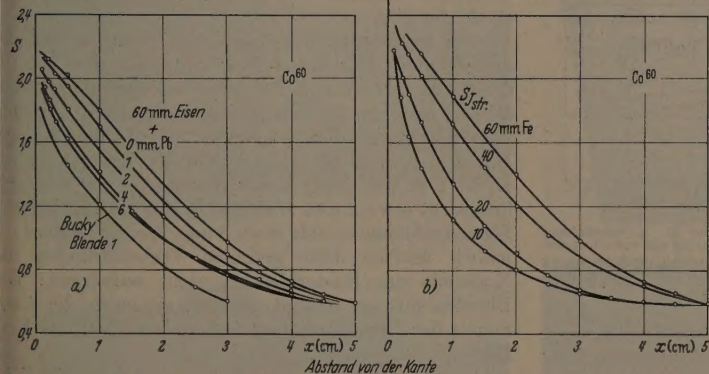


Abb. 22 a u. b. a Streustrahlenfilterung durch Bleischichten. b Schwärzung durch Streustrahlung aus verschiedenen Eisendicken hinter einer abschattenden Kante.  $S_{I_{\text{pr}}} + I_{\text{str}}$  = Schwärzung durch Gesamtstrahlung,  $S_{I_{\text{str}}}$  = Schwärzung durch Streustrahlung

wobei  $D$  = Quelldurchmesser,  
 $b$  = Quelle—Fehlerabstand,  
 $a$  = Fehler—Filmabstand.

Für die gegenwärtigen Verhältnisse ( $a + b = 35$  cm,  $D = 0,2$  cm und  $a = 5$  cm; Fehler an der Oberfläche eines Absorbers) wird  $U_R = 0,3$  mm. Bringt man eine 5 cm hohe Bucky-Blende ein, so wird  $U_R = 0,5$  mm

koeffizient für das Zwischenmaterial (hier Papier),  
 $\mu_2$  = Schwächungskoeffizient für Blei.

### E.4. Photographische Bestimmung der Wirksamkeit von Streustrahlenfiltern und Blenden

Zur Untersuchung sind zwei Verfahren denkbar:

a) Variation des Streustrahlenzusatzes durch Verwendung von engem und weitem Strahlenbündel [40]

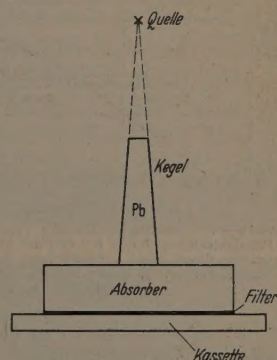


Abb. 23. Schattenstreuung hinter Bleikegel



Tabelle 6. Zu Versuchssreihe 1.

Zeilen: Relative Streustrahlenintensität hinter der angegebenen Stahldicke und Filterung. Spalte a: Relative Streustrahlenintensität für verschiedene Stahldicken

	(a)	(b) 0 mm Pb	1 mm Pb	2 mm Pb	4 mm Pb	6 mm Pb	Bucky- Blende
60 mm Fe	100	100	89,8	77,2	64,2	63,6	41,5
40 mm Fe	80,5	100			66,7		
20 mm Fe	57,6	100			57		
10 mm Fe	48	100			54		

b) Untersuchung der Streustrahlung hinter abgeschattenden Körpern.

Verfahren b) scheint für  $\gamma$ -Strahlen und quantitative Untersuchungen besser geeignet und wurde in zwei Variationen angewandt.

### Versuchssreihe 1

Die Versuchsanordnung geht aus Abb. 22a hervor. Unter der abgeschatteten Hälfte des Absorbers ist

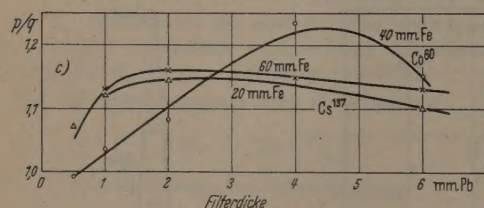
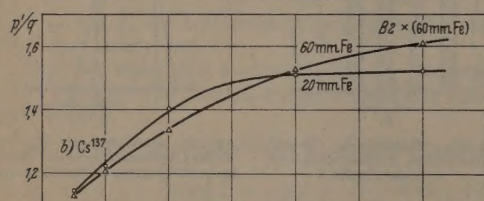
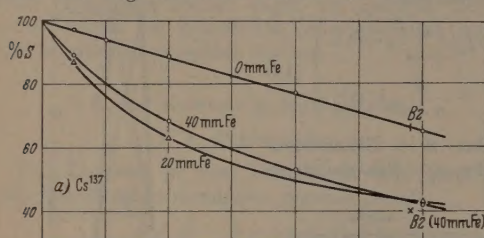


Abb. 24a—c. Streustrahlenfilterung (Versuchssreihe 2). a Schwächung der Primärstrahlung (0 mm Fe) und der Streustrahlung aus verschiedenen Eisendicken durch Blei. b Schwächung der Primärstrahlung/Schwächung der Streustrahlung. c Gütefaktor (Definition s. Text) bei verschiedenen Bleidicken

nur die Streustrahlung in ihrer charakteristischen spektralen Zusammensetzung und Winkelverteilung wirksam. Man kann jedoch nicht auf die Gesamtmenge der Streustrahlung schließen. Diese Methode gestattet nur vergleichende Untersuchungen.

Die Belichtungszeiten wurden so berechnet, daß die Grundschwärzungen (ohne Filter, in der exponierten Hälfte) gleich waren. Die Streuschwärzungen wurden registrierend photometriert, in Schwärzungskurven umgezeichnet und geringe Korrekturen (Schleier und Grundschwärzung) angebracht (Abb. 22a, b) und schließlich die Schwärzungsflächen graphisch integriert.

Die Ergebnisse für  $Co^{60}$ - $\gamma$ -Strahlung sind in Tabelle 6 zusammengefaßt.

Wie man sieht (Abb. 22a), nimmt die relative Wirksamkeit (nur im Sinn der Streustrahlenschwächung) der Bleifilter etwa ab 2 mm mit der Dicke ab. Über 4 mm Bleifilterdicke tritt nur noch geringe Verbesserung ein. Die Bucky-Blende wurde nur mit den Streifen parallel zur Kante untersucht. Sie hat in dieser Lage ihre höchste Wirksamkeit. Die kantenferne Streustrahlenintensität wird durch die Bleifilter relativ nicht stärker geschwächt, wie es auf Grund der Energie-Winkel-Beziehung zu erwarten wäre. Dies besagt nur, daß bei 60 mm Eisen die Streustrahlung schon sehr diffus ist.

### Versuchssreihe 2

In weiteren Versuchen mit  $Co^{60}$  und  $Cs^{137}$  wurde die Schattenstreuung hinter einem Kegelstumpf aus Blei untersucht (Abb. 23). Die Kegel wurden lichtoptisch zentriert, waren 10 cm hoch und blendeten auf dem Film eine Kreisfläche mit 1,5 cm  $\varnothing$  aus. Die Kreisflächen waren homogen geschwärzt und es konnte jeweils gleichzeitig die Schwächung der Gesamtstrahlung durch die Bleifilter festgestellt werden. Die Untersuchungen wurden mit  $Co^{60}$  an 40 mm Eisenabsorber und mit  $Cs^{137}$  an 20, 40 und 60 mm Eisen durchgeführt.

Es sei ein Gütefaktor in folgender Weise definiert [44].

Wird die Gesamtstrahlung von  $I$  auf  $pI$  geschwächt und die Streustrahlung von  $I_{\text{streul}}$  auf  $qI_{\text{streul}}$ , so ist der Gütefaktor  $p/q$  ein objektives Maß für die Wirtschaftlichkeit eines Filters oder einer Blende.

Aus  $p/q \sim e^{\left(\frac{\mu_s}{\cos \alpha} - \mu_p\right)}$  und dem Gang des Schwächungskoeffizienten ergibt sich, daß Blei die optimale Filterwirksamkeit hat. Weiterhin interessiert noch die Frage, wie weit eine Vergrößerung der Filterdicke überhaupt (unter Verzicht auf Wirtschaftlichkeit) sinnvoll ist, d. h. die Schwächung der Primärstrahlung allein im Verhältnis zur Schwächung der Sekundärstrahlung  $p'/q$ .

Die experimentellen Ergebnisse sind in Abb. 24a—c aufgetragen. Der Gütefaktor empfiehlt die Anwendung von etwa 4 mm Bleifilter bei Eisendicken von 40 mm und etwa 2 mm Bleifilter für  $Cs^{137}$ , ziemlich unabhängig von der Eisendicke. Die beiden Bucky-Blenden  $B_1$  und  $B_2$  bringen zwar Verbesserungen —  $B_1$  ist z. B. (bei  $Co^{60}$ ) in der Absorption der Gesamtintensität etwa 2 mm Blei und in der Absorption der Streustrahlenintensität etwa 3 mm Blei äquivalent — jedoch dürften diese geringen Verbesserungen die Nachteile der Rasterblenden nicht aufwiegen: Die Blenden müssen bewegt werden, sie legen die Geometrie der Durchstrahlung fest und machen das Verfahren ortsgebunden.

Zur Charakterisierung der praktischen Möglichkeiten der Radiographie mit  $\gamma$ -Isotopen sind einige Textaufnahmen (Abb. 25a—c) angefügt.

### Zusammenfassung

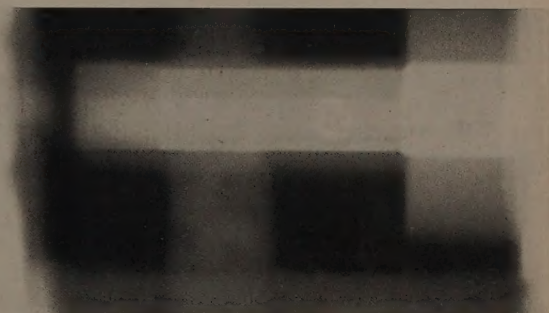
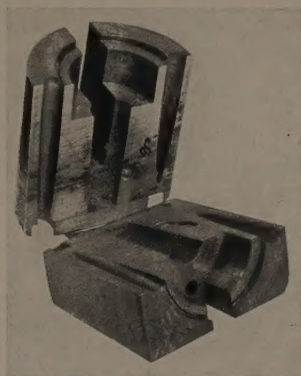
Nach einem Überblick über den Stand, die Probleme und die Möglichkeiten der zerstörungsfreien Materialprüfung mit  $\gamma$ -strahlenden Isotopen, auch im Vergleich mit der Röntgenographie, wird in mehreren unabhängigen Einzeluntersuchungen der Einfluß von Verstärkerfolien, Streustrahlenfiltern und -blenden auf die Qualität von Radiogrammen mit  $Co^{60}$ - und  $Cs^{137}$ -



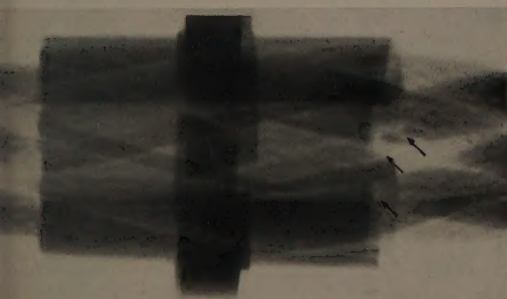
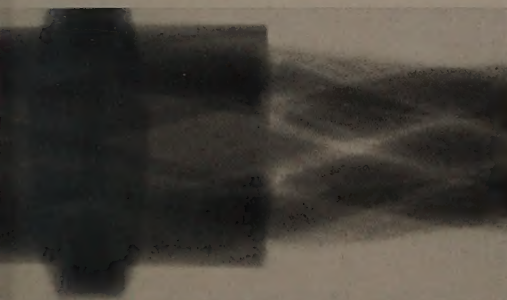
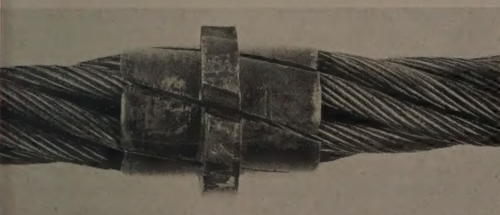
Strahlen untersucht. Im Rahmen dieser Untersuchungen wird eine quantitative Deutung des Verärkungsmechanismus von Metallfolien gegeben und verschiedene Versuchsva-riationen, wie Änderung der Energie und des Einfallswinkels der  $\gamma$ -Strahlen, des Streustrahlensatzes, der Foliendicke und der Folienart, angewandt. Die Wirkung von metallischen Verstärkerfolien, sowohl auf der Vorder- wie auf der Rückseite des Films, kann durch das Zusammenwirken von Sekundärelektronenerzeugung und Elektronenstreuung befriedigend erklärt werden. Die photographische Wirkung der  $\gamma$ -Strahlen im Bereich um 1 MeV beruht beinahe ausschließlich auf Elektronen, die in der Umgebung des Films (Verstärkerfolie, Kasten oder umgebende Luft) ausgelöst werden. Die verwendete Röntgenemulsion wird hinsichtlich ihrer Energieausnutzung für  $\gamma$ -Strahlen verschiedener Härte quantitativ untersucht. Die Energieabsorption für verschiedene Quantenenergien wird vergleichend mit dem Prinzip der Hohlraumionisation bestimmt. Für die relativ grobkörnige Emulsion (mittlerer Kornarchmesser  $2\mu$ ) ergibt sich im Bereich von 0,1 bis 2 MeV mit zunehmender Strahlenhärte bessere Energieausnutzung.

Die wichtigsten praktischen Ergebnisse sind: Die Zeichenschärfe auf Radiogrammen ist, außer von den

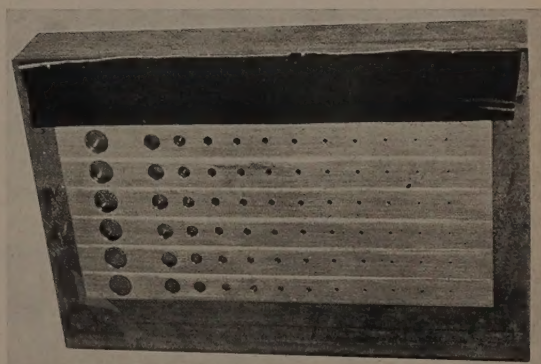
geometrischen Bedingungen, auch von der Umgebung des Films abhängig. Die unvermeidliche Unschärfe



b



a



c

bb, 25a—c. Testaufnahmen. a Seil der Herzogstandbahn mit Klemme mit verschiedenen zum Teil verdeckten Drahtbrüchen. b Maschinenteil mit Lunker 70 mm hoch, aufgeschnitten und von oben durchstrahlt. c Lochstufentest: Stufenhöhe 1,2—0,2 mm, Lochdurchmesser 4—0,1 mm, 10<sup>10</sup>; 4 mm Pb-Filter; 0,1 mm Pb unter, Al über dem Film; 0,5% Fehlererkennbarkeit bei 40 mm Fe. Zellenerkennbarkeit: Maß für Zeichenschärfe. Spaltenerkennbarkeit: Maß für Kontrast



durch Sekundärelektronenstreuung variiert, je nach der Ordnungszahl des umgebenden Materials etwa zwischen 0,4 bis 0,6 mm (bzw. 0,2 bis 0,3 mm) für  $\text{Co}^{60}$  (bzw.  $\text{Cs}^{137}$ ). Vorderfolien mit hoher Dichte und nicht zu hoher Ordnungszahl geben die beste Zeichenschärfe. Schweratomige Hinterfolien verschlechtern die Zeichenschärfe nur unwesentlich und verstärken bei hohen  $\gamma$ -Energien des untersuchten Bereiches besser als Vorderfolien. Im Bereich um 2 MeV wirken dünne Bleivorderfolien im Vergleich zu leichtatomigen Vorderfolien für die reine Primärstrahlung schwächend, während sie die Streustrahlung verstärken. Der Verstärkungsfaktor steigt bei Streustrahlenzusatz mit zunehmender Absorberdicke bis zu einem Maximalwert, der durch den Mechanismus der multiplen Streuung von  $\gamma$ -Strahlen begründet ist. Schweratomige Vorderfolien sind deshalb im Interesse guten Kontrastes bei Aufnahmen mit Absorbern, deren Dicke die Halbwertsdicke überschreitet, zu vermeiden. Leuchtfolien auf der Filmrückseite sind den Bleifolien in der Zeichenschärfe fast gleichwertig, in der Verstärkung aber überlegen. Zusätzliche Bleirückfolie erhöht ihre Verstärkungswirkung um etwa 15%.

Die optimalen Dicken für Streustrahlenfilter aus Blei liegen für  $\text{Co}^{60}$  ( $\text{Cs}^{137}$ ) bei 4 (2) mm. Sie schwächen dann die Streustrahlung um etwa 35%. Bucky-Blenden haben im untersuchten Bereich ähnliche kontrastverbessernde Wirkung. In Abwägung gegen ihre Nachteile erscheint ihre Anwendung nicht gerechtfertigt.

Herr Prof. Dr. MAIER-LEIBNITZ ermöglichte mir die Anfertigung dieser Arbeit an seinem Institut. Für seine Unterstützung und für wertvolle Hinweise und Diskussionen möchte ich ihm herzlich danken.

**Literatur:** Zusammenfassende Darstellungen für die praktische Materialprüfung mit gammastrahlenden Isotopen: MÜLLER, E. A. W.: ATM V 91194 1-4 (1952/53) mit ausführlichem Literaturverzeichnis. — CLAUSER, H. R.: Practical Radiography. New York 1952.

[1] Memorandum on Gammaray-Sources for Radiography. The Inst. of Phys. London, 1954. — [2] WEST, R.: Nucleonics

11 (1953). — [3] MAYNEORD, W.: Brit. J. Radiol. 25, 51 (1952); 29, 277 (1956). — [4] COLBECK, E. W., J. R. RAY and H. S. PEISER: Radioisotopes Conf. 1954, II Oxford, 198. — [5] RUPP, A. F.: Proc. Int. Conf. Geneva 14, 68, 128 (1956). — [6] CLARKE, E. T.: Proc. Int. Conf. Geneva 15, 188 (1956). — [7] GREENING, J. R.: Proc. Phys. Soc. Lond. B 64, 977 (1951). — [8] COWING, R. F., and C. K. SPALDING: Radiology 52, 42 (1949). — [9] BROMLEY, D., and R. H. HERZ: Proc. Phys. Soc. Lond. B 63, 90 (1950). — [10] KARTHUZHANSKII, A. L.: J. Exp. Theoret. Phys. 29, 516 (1955). — Soviet Phys. JETP 2, 550 (1956). — [11] EGERT, J., u. W. NODDAR: Z. Phys. 20, 299 (1923); 31, 922 (1925); 34, 907, 918 (1925). — Naturwiss. 15, 57 (1927). — [12] HOERLIN, H.: Z. Naturforsch. 6a, 344 (1951). — [13] GRAY, L. H.: Proc. Roy. Soc. Lond. 156, 578 (1936). — [14] MARINELLI, L. D.: Ann. Rev. Nucl. Sci. 3, 249 (1953). — [15] WANG, T.: Nucleonics 7, 55 (1950). — [16] GLOCKER, R.: Z. Physik 136, 367 (1953). — [17] ATTIE, F. H., and L. V. SPENCER: Radiation Res. 3, 239 (1955). — Radiology 64, 113 (1955). — Proc. Int. Conf. Geneva 14, 156 (1956). — [18] WHYTE, G. N.: Nucleonics 12 (1954). — [19] OOSTERKAMP, W. J.: Appl. Sci. Res. B 3, 100 (1953). — [20] PELC, S. R.: Proc. Phys. Soc. Lond. 57, 523 (1945). — [21] GLOCKER, R.: Z. Physik 136, 352 (1953); 143, 191 (1955). — [22] DAVISSON, C. M., and R. D. EVANS: Rev. Mod. Phys. 24, 79 (1952). — [23] GRAY, L. H.: Brit. J. Radiol. 22, 67 (1949). — [24] NUTTING, P. G.: Phil. Mag. 26, 423 (1913). — [25] ANDRESEN, N., C. CHAPMANN-ANDRESEN, H. HOLTER and C. V. ROBINSON: C. R. Trav. Labor. Carlsberg, Sér. Chim. 28, 499 (1953). — [26] HOERLIN, H., and F. A. HAMM: J. Appl. Phys. 24, 1514 (1953). — [27] HOERLIN, H.: J. Opt. Soc. Amer. 39, 891 (1949). — [28] HARRINGTON, E. L., H. E. JOHNS, A. P. WILES and C. GARRET: Canad. J. Res. F 26, 540 (1948). — [29] HEITLER, W.: Quantum Theory of Radiation. 1954. — [30] MOTZ, J. W.: Phys. Rev. 100, 1560 (1955). — [31] HINE, G. J.: Nucleonics 10 (1952). — [32] HINE, G. J.: Nucleonics 7 (1950). — [33] SEEMANN, H. E.: J. Appl. Phys. 8, 836 (1937). — [34] KLETT, C.: Z. angew. Phys. 6, 557 (1954). — [35] STEDER, F. J., and D. A. CUSANO: J. Opt. Soc. Amer. 45, 49 (1955). — [36] BERTHOLD, R.: Atlas der zerstörungsfreien Prüfverfahren. Leipzig 1938. — [37] FOWLER, W. A.: Rev. Mod. Phys. 20, 256 (1948). — [38] KATZ, L., and A. S. PENFOLD: Rev. Mod. Phys. 24, 28 (1952). — [39] BOTHE, W.: Z. Naturforsch. 4a, 542 (1949). — [40] BERTHOLD, R., N. RIEHL: Z. VDI 76, 401 (1932). — [41] SCHITTENHELM, R.: Z. angew. Phys. 8, 569 (1956). — [42] RÖHLER, R.: Z. angew. Phys. 8, 577 (1956). — [43] BLIZARD, E. P.: Ann. Rev. Nucl. Sci. 1955, 73. — [44] BERTHOLD, R.: Arch. Eisenhüttenw. 8, 21 (1934/35).

Dr. H. HEROLD,

München, Labor für Technische Physik  
der Technischen Hochschule

## Buchbesprechungen

**Harnwell, G. P., und W. E. Stephens: Atomic Physics.** New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Comp. 1955. 401 S. u. zahlr. Abb. Geb. \$ 8,00 bzw. s 60.

Das in der Reihe „International Series in Pure and Applied Physics“ erschienene Werk will, wie auch im Untertitel ausgedrückt ist, eine atomistische Beschreibung der physikalischen Erscheinungen geben. Es ist aus einem einjährigen Kurs für fortgeschrittene Studenten entstanden und wendet sich auch in erster Linie an diese. Ausgehend von den kurz zusammengefaßten Tatsachen der klassischen Physik wird über die bekannten experimentellen Befunde die Notwendigkeit einer atomistischen Beschreibung begründet und eine Einführung in diese gegeben. Dabei nimmt den breitesten Raum die Theorie der Spektren ein, aber auch statistische Fragen werden ausführlich diskutiert. Die theoretischen Hilfsmittel werden nur insoweit und erst dann bereitgestellt, wie es die behandelten physikalischen Erscheinungen erfordern. Damit ist das Werk also kein konsequentes Lehrbuch der Quantenmechanik, vielmehr sollen die ihr zugrunde liegenden physikalischen Sachverhalte aufgezeigt werden. Kernphysikalische Fragen werden nur am Rande behandelt. Jedem Kapitel ist eine Sammlung von Aufgaben beigelegt. Außerdem enthält das Buch viele Literaturhinweise in experimenteller wie theoretischer Richtung, so daß der interessierte Leser sich unschwer in das behandelte Gebiet tiefer einarbeiten kann. Das Werk ist allen zu empfehlen,

die ohne einschlägige Vorkenntnisse eine leichtfällige Einführung in die quantenphysikalische Betrachtungsweise suchen.

F. ENGELMANN

**Kockel, B.: Darstellungstheoretische Behandlung einfacher wellenmechanischer Probleme.** Leipzig: B. G. Teubner 1955. 232 S. u. 28 Abb. Geb. DM 18,50.

Der Autor ist bestrebt die gruppentheoretische Methodik in der Quantenmechanik in einer solchen Art darzulegen, daß auch ein algebraisch weniger geschulter Physiker in der Lage ist, diese für das Verständnis der Spektren so wichtige Behandlungsweise zu erlernen, wobei nur die Kenntnis der Schrödingerschen Theorie vorausgesetzt wird. Ausgehend von den Eigenfunktionen im kugelsymmetrischen Potential wird das Transformationsverhalten dieser Funktionen bei Drehungen untersucht und damit der Leser in einfacher Weise in die Darstellungstheorie eingeführt. An zahlreichen Beispielen werden die Eigenschaften von Gruppen erläutert und die Ausdehnung von Matrixsystemen besprochen. An die Behandlung der ein- und zweideutigen Darstellungen der Drehgruppe schließt eine ausführliche Besprechung von Atomen mit mehreren Elektronen und deren Eigenfunktionen an. Am Ende des Buches wird schließlich der Zeeman-Effekt gruppentheoretisch erläutert. Für eine spätere Auflage wäre es zu begrüßen, wenn der so wichtige Begriff der Charaktere einer Darstellung aufgenommen würde.

E. FICK